Sesiones de

Pensamiento Matemático III

Pensamiento Variacional

Con base en el Nuevo Marco Curricular Común de la Educación Media Superior NMCCEMS

Ramiro González Cárdenas

SESIONES DE

PENSAMIENTO MATEMÁTICO III

Pensamiento variacional

Basado en el Nuevo Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (**NMCCEMS**)

RAMIRO GONZÁLEZ CÁRDENAS

EDITORIAL EM^2 YLC
"UNA EDITORIAL QUE MUESTRA COMO APRENDER A DESARROLLAR EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO"

SERIE: COLECCIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO.

SESIONES DE

PENSAMIENTO MATEMÁTICO III.

Pensamiento variacional.

Ramiro González Cárdenas
Primera Edición 2024
Editorial EM^{2}YLC S.A. de C.V.

Diseño editorial:
Arturo Romero Lucas

Diseño de portada:
Juan Carlos Morales Hernández

Ilustración de interiores:
Andrea Pastor López

Diseño y diagramación:
Grupo Editorial EM^{2}YLC S.A. DE C.V.

ed.em2ylc@gmail.com
EditorialEm2ylcSadecv
712 101 54 74
https://em2ylc.com

Director general de ventas
Lic. D. Juan Miguel Sanabria Alva
712 153 4251

Promotores autorizados

Distribuidor de Atlacomulco, Méx.	712 101 5474
Distribuidor de la zona de Toluca, Méx.	722 396 3955
Distribuidor de la zona de Tecámac, Méx.	55 1197 6822
Distribuidor de la Zona Oriente, Méx.	55 8005 7108
Distribuidor de la Zona Poniente, Méx.	722 431 99 95
Distribuidor CDMX. Méx.	55 2691 2998

No hay rama de la matemática,
por abstracta que sea,
que no pueda aplicarse algún día
a la realidad.

Nicolai Lobachevsky

PRESENTACIÓN

En el siglo XVI prevalecía el más grande de los retos para la sociedad matemática; resolver problemas de velocidad y aceleración instantánea para la fabricación de máquinas y herramientas necesarias que impulsaran el desarrollo cultural y el progreso económico. Durante el siglo XVII, los científicos se enfrentaron a otros problemas resultantes como:

a) Problemas de movimiento.
b) La determinación de tangentes a varias curvas.
c) Problemas de máximos y mínimos.
d) Cálculo de longitudes y áreas de curvas irregulares.

Por lo anterior, la sociedad matemática estaba en crisis, con los conocimientos matemáticos que se tenían hasta ese momento, aún existían limitantes para resolver cálculos matemáticos. Cuando todo parecía ser un fracaso surgieron, de manera simultánea dos mentes brillantes: Isaac Newton (1642 – 1727) y Godofredo Guillermo Leibniz (1646 – 1716), a quienes se les conoce como los precursores del cálculo infinitesimal; disciplina que terminaría por revolucionar el mundo entero.

Una vez descubierto el cálculo infinitesimal, ocurrieron tres cambios:

1. El reemplazo de la madera por el petróleo y la invención de la máquina de vapor (desarrollada en el último tercio del siglo XVIII).
2. Fomento de la innovación que propició avances en conocimientos científicos, acción que derivó en el progreso tecnológico.
3. La invención de la primera computadora programable durante la década de 1970.

Actualmente, casi todas las personas adultas e incluyendo a los niños, utilizan un teléfono celular y la web (Internet), ambas invenciones resultantes de la revolución de la nanotecnología (tecnología que se dedica al diseño y manipulación de la materia a nivel de átomos o moléculas, con fines industriales o médicos, entre otros). En otras, palabras, el cálculo infinitesimal fue la precursora de la era digital o inteligencia artificial, esta a su vez ha impulsado el desarrollo económico y científico del mundo moderno.

CONCIDERACIONES:

El perfil de egreso de las y los estudiantes, en el Recurso Sociocognitivo de Pensamiento Matemático, queda referido en el currículum bajo los siguientes aprendizajes de trayectoria:

1. Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados, para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.
2. Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades, y de la vida cotidiana).
3. Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.
4. Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

Por tal motivo, estudiar el pensamiento variacional es de gran transcendencia en el Bachillerato o Educación Media Superior (EMS), ya que es considerado como un nivel educativo en el que se pretende formar las mentes jóvenes en el estudio de esta matemática y desarrollar el potencial de aquellos que han de revolucionar el futuro del mundo entero.

No obstante, hablar de enseñar Cálculo Diferencial, de cómo los jóvenes pueden aprenderlo, es un gran reto, sin embargo, en este libro de texto denominado "Pensamiento matemático III, Pensamiento variacional", se propone una forma práctica y lúdica de aprendizaje, sin perder de vista el eje rector de las progresiones de aprendizaje que establece el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS).

Para su mejor estudio, este libro de texto está organizado en tres parciales:
Parcial 1. Variación promedio. (P. A. 1 - 5)
Parcial 2. Variación instantánea. (P. A. 6 - 10)
Parcial 3. Aplicación de la variación promedio e instantánea. (P. A. 11 - 15)

De esta manera, es como el docente y el estudiante harán uso de las progresiones de aprendizaje propuesta por la Nueva Escuela Mexicana (NEM) y dirigir tanto su práctica docente como su aprendizaje del Pensamiento variacional (Cálculo Diferencial), durante el tercer semestre de Educación Media Superior.

ÍNDICE

PARCIAL 1
Variación promedio.

Progresiones de aprendizaje en este parcial.

Progresión.
01

Genera intuición sobre conceptos como variación promedio, variación instantánea, procesos infinitos y movimiento a través de la revisión de las contribuciones que desde la filosofía y la matemática hicieron algunas y algunos personajes históricos en la construcción de ideas centrales para el origen del cálculo.

M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.

Progresión.
02

Analiza de manera intuitiva algunos de los problemas que dieron origen al cálculo diferencial, en particular el problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado.

M3. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del Pensamiento Matemático, de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno.

M1. Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.

Progresión.
03

Revisa situaciones y fenómenos donde el cambio es parte central en su estudio, con la finalidad de modelarlos aplicando algunos conocimientos básicos de funciones reales de variable real y las operaciones básicas entre ellas.

M1. Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.

Progresión.
04

Analiza la gráfica de funciones de variable real buscando simetrías, y revisa conceptos como continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidades, entre otros, resaltando la importancia de éstos en la modelación y el estudio matemático.

M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.

Progresión.
05

Conceptualiza el límite de una función de variable real como una herramienta matemática que permite comprender el comportamiento local de la gráfica de una función.

M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.

M2. Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.

M1. Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.

Fecha:

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Instrucciones

Lee y resuelve cada uno de los planteamientos utilizando las operaciones pertinentes. Después elije la opción que consideres correcta y rellena el círculo correspondiente en la hoja de respuestas que se encuentra en los anexos del libro, en la columna correspondiente a la evaluación diagnóstica. (Valor 100%).. **Nota:** La hoja de respuesta se encuentra en los anexos del libro.

Duración: **100 minutos**

Observa el siguiente ejemplo.

E1. Rama de las matemáticas que se encarga del estudio de las figuras y cuerpos geométricos.

a) Geometría b) Álgebra c) Aritmética d) Cálculo

Hoja de respuesta.

E1. ● B C D

1. Juan Antonio pagó $50.00 por cuatro gaseosas, ¿cuánto cuesta cada gaseosa?

a) $200.00 b) $25.00

c) $12.50 d) $17.50

2. Si una llave de dos pulgadas tarda una hora para llenar un tinaco de 1 000 litros de agua, ¿cuánto tardará una llave de media pulgada en llenar el mismo tinaco de 1 000 litros?

a) 1/4 hr. b) 4 hrs.

c) 1 hr. d) 2 hrs.

3. La señora de la tienda escolar vendió $1,280.00 de dulces y cada dulce lo vende en $2.50 ¿Cuántos dulces vendió?

a) 525 b) 512

c) 595 d) 640

4. ¿Cuál es el resultado de la siguiente resta: 3 596 – 568?

a) 3 028 b) 2 022

c) 3 026 d) 2 072

5. ¿Cuál es el resultado de la multiplicación 512×2.5?

a) 1 024 b) 1 198.5

c) 1 285.25 d) 1 280

6. Juan Antonio González hizo un recorrido con su automóvil de 200km a una velocidad promedio de 120km/h. ¿Cuánto tiempo tardó en recorrer esa distancia?

a) 3/5 hr. b) 5/3 hr.

c) 1/3 hr. d) 1 1/3 hr.

7. ¿Cuál es el resultado de la operación: 3,256 + 12,541 − 258 =?

a) 15,539 b) 1,539

c) 16,931 d) 1,692

8. ¿Cuál es el producto que se obtiene al desarrollar el binomio elevado al cuadrado: $(x + 2)^2$?

a) $x^2 + 4$ b) $x^2 + 2x + 4$

c) $x^2 + 4x + 4$ d) $(2x)^2$

9. ¿Cuál es el resultado de $5m^2 - 12m^2$?

a) $7m^2$ b) $-17m^4$

c) $12m^2$ d) $-7m^2$

10. ¿Cuál es el resultado de $\frac{6}{8}+\frac{3}{6}$?

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{5}{4}$

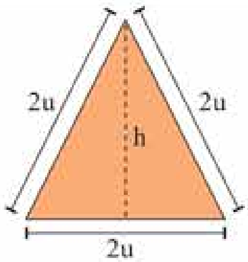
c) $\frac{18}{48}$ d) $\frac{9}{14}$

11. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación $\frac{3}{4} \div \frac{3}{2} =$?

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{6}{8}$

c) $\frac{1}{8}$ **d)** $\frac{5}{7}$

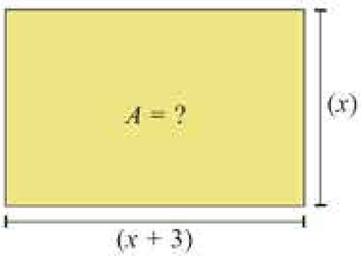
12. Sí un triángulo es equilátero y cada uno de sus lados mide 2u, ¿cuál es el área del triángulo?



a) $A = \sqrt{3}u^2$ **b)** $A = \frac{1}{4}\sqrt{3}u^2$

c) $A = \frac{1}{2}\sqrt{3}u^2$ **d)** $A = 4\sqrt{3}u^2$

13. ¿Cuál es el área del rectángulo que mide de ancho (x) y de largo $(x + 3)$?



a) $A = x^2 + 3x$ **b)** $A = x^2 + 3$

c) $A = 5x^2 + x$ **d)** $A = x^2 + 5x$

14. ¿Cuál es el resultado de factorizar el Trinomio Cuadrado Perfecto $(x^2 + 10x + 25)$?

a) $(x + 35)^2$ **b)** $(x + 25)^2$

c) $(x + 10)^2$ **d)** $(x + 5)^2$

15. ¿Cuál es el resultado de $h(x) = f(x) - g(x)$, sí $f(x) = (x^2 + 3)$, y $g(x) = (x - 1)$?

a) $h(x) = x^2 - x + 2$ **b)** $h(x) = x + 2$

c) $h(x) = 2x^2 + 2$ **d)** $h(x) = x^2 - x + 4$

16. ¿Cuál es el resultado que se obtiene al reducir la fracción algebraica $\frac{48x^7}{4x}$?

a) $12x^7$ **b)** $\frac{1}{12}x^6$

c) $12x^{-6}$ **d)** $12x^6$

17. ¿Cuál es el resultado de multiplicar: $(12x^3)(-3x^6)$?

a) $-36x^{18}$ **b)** $-36x^9$

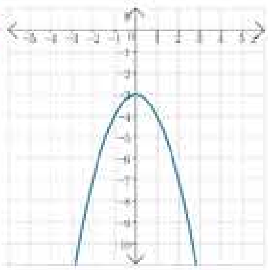
c) $36x^{-3}$ **d)** $-36x^3$

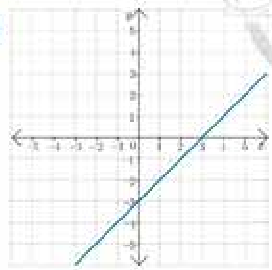
18. ¿Cuál es el valor de $f(2)$, sí $f(x) = x^2 - 3x$?

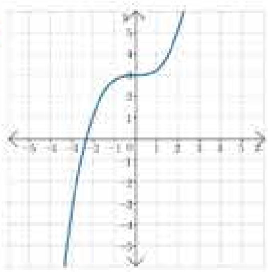
a) $f(2) = -2$ **b)** $f(2) = -10$

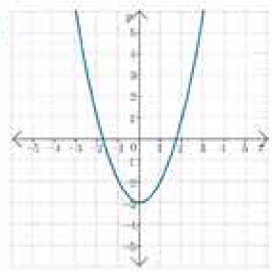
c) $f(2) = 2$ **d)** $f(2) = -6$

19. ¿Cuál es la gráfica que pertenece a la ecuación $f(x) = x^2 - 3$?

a) 

b) 

c) 

d) 

20. ¿Cuál es el resultado que se obtiene al factorizar la expresión: $2m^2n - 4mn^2$ por factor común?

a) $(2mn)(m - 2n)$ **b)** $(2)(m^2n - 2mn^2)$

c) $(2m^2n)(1 - 2n)$ **d)** $(4mn)(\frac{1}{2}mn - 1mn)$

Fecha:

SESIÓN 01

Noción intuitiva del infinito.

Duración: **100 minutos**

PROGRESIÓN 01

Genera intuición sobre **conceptos** como **variación promedio**, **variación instantánea**, procesos infinitos y movimiento a través de la revisión de las contribuciones que desde la filosofía y la matemática hicieron algunas y algunos personajes históricos en la construcción de ideas centrales para el origen del cálculo. **M1C2S1.**

Plan de clase

INICIO

30 minutos

Situación Problema. Preguntas o actividades de análisis. Exploración de la progresión.

1. Reúnete con 2 compañeros y realicen cada una de las actividades.
2. En plenaria, con la guía del profesor socialicen las respuestas de las preguntas y formulen dos conclusiones de los procesos realizados.

DESARROLLO

50 minutos

Acceso al conocimiento científico. Solución de problemas adicionales. Ejercitación.

3. En equipos de tres personas, analicen la información.
4. Visita el sitio https://www.geogebra.org/m/nysp8wgr realiza las actividades y contesta las preguntas.

CIERRE

20 minutos

Actividad de metacognición. Cuestionario de la progresión. Rúbrica de desempeño. Valoración de actividades de aprendizaje. Actividad de "Para conocer más"

5. De manera individual, resuelve los ejercicios para retroalimentar tu aprendizaje en los procesos infinitos.
6. De forma individual reflexiona sobre tus aprendizajes de la sesión, apoyate en los videos del apartado "Cultura Digital".

Recursos didácticos

- Útiles escolares.
- PC o Smartphone.
- Texto: El área de un círculo y el valor aproximado de π.

Actividad 1 Reúnete con 2 compañeros y realicen cada una de las siguientes actividades.

Una serie que es infinita.

Inicio

Hay series que tienen varios capítulos, pero, tiene un final y series que nunca terminan. Para comprender lo que es un proceso infinito, realicen las siguientes actividades:

- Trazar un cuadrado en una hoja blanca o cuadriculada de libreta, lo más grande posible, así como se muestra en la (Fig. 1).
- Dividir el cuadrado en dos partes iguales y de forma vertical e iluminar una de las partes con el color de tu preferencia, así como se muestra en la (Fig. 2).
- Dividir en dos partes iguales y en forma horizontal la parte que queda sin iluminar de la (Fig. 2) e iluminar con el mismo color una de las partes, así como su muestra en la (Fig. 3).

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

- Continuar con el proceso anterior hasta obtener la (Fig.10).
- A continuación, respondan las siguientes interrogantes:

a) ¿Cuál es el área del cuadrado de la (Fig. 1) considerando que su longitud es de 1 unidad?

____

b) ¿Cuál es el área de la región iluminada en la (Fig. 2)?

____

c) ¿Cuál es el área de la región iluminada en la (Fig. 3)?

____

d) ¿Cuál es el área de la región iluminada en la (Fig. 4)?

____

Secuencia de Fibonacci. La fórmula de la naturaleza.

▶ De acuerdo al comportamiento de las áreas iluminadas de las figuras anteriores, completa la siguiente tabla de valores con los datos de las figuras realizadas.

No. de figura.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	n
Área iluminada.	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$								
Área iluminada que se incrementó con respecto a la anterior.	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$								

▶ Analicen los valores registrados en la tabla y contesten las preguntas:

a) ¿Cómo se comporta el área de la región sin iluminar conforme el número de figuras aumenta?

____

b) ¿Cómo se comporta el área iluminada conforme el número de figura aumenta?

____

c) ¿Qué dificultades se enfrentarían para trazar la figura 100?

____

d) ¿Cuál sería el área iluminada de la figura 100?

____

e) ¿Cuántas figuras serán necesarias para iluminar toda la figura original?

____

Actividad 2 En plenaria, con la guía del profesor socialicen las respuestas de las preguntas anteriores y formulen dos conclusiones de los procesos realizados.

Conclusión 1:

El área de la región iluminada...

Conclusión 2:

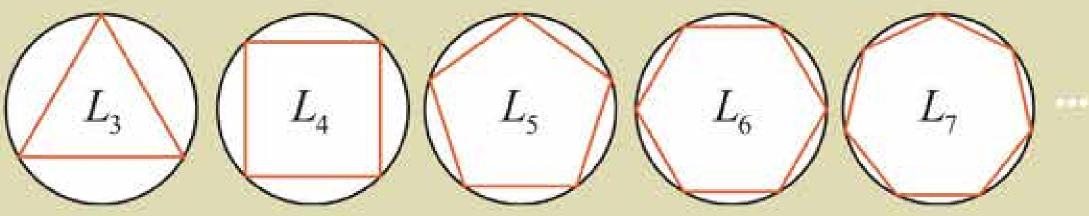
Un **proceso infinito** es...

Actividad 3 En equipos de tres personas, analicen la siguiente información.

Desarrollo

El área de un círculo y el valor aproximado de π.

Los primeros procesos para calcular el área del círculo se remontan a la antigua Grecia, donde matemáticos como Anaxágoras y Eudoxo hicieron contribuciones significativas. Anaxágoras, en el siglo V a.C., fue uno de los primeros en considerar la idea de medir áreas, aunque su enfoque era más filosófico que matemático. Eudoxo, sin embargo, desarrolló un método más riguroso conocido como el método de agotamiento. Este método consistía en inscribir y circunscribir polígonos regulares dentro y fuera del círculo y calcular sus áreas. A medida que se aumentaba el número de lados del polígono, la diferencia entre las áreas del polígono y del círculo disminuía, lo que permitía aproximar el área del círculo con mayor precisión. Este enfoque precursor del cálculo integral fue una manera ingeniosa de acercarse al valor real del área del círculo.



Arquímedes de Siracusa.

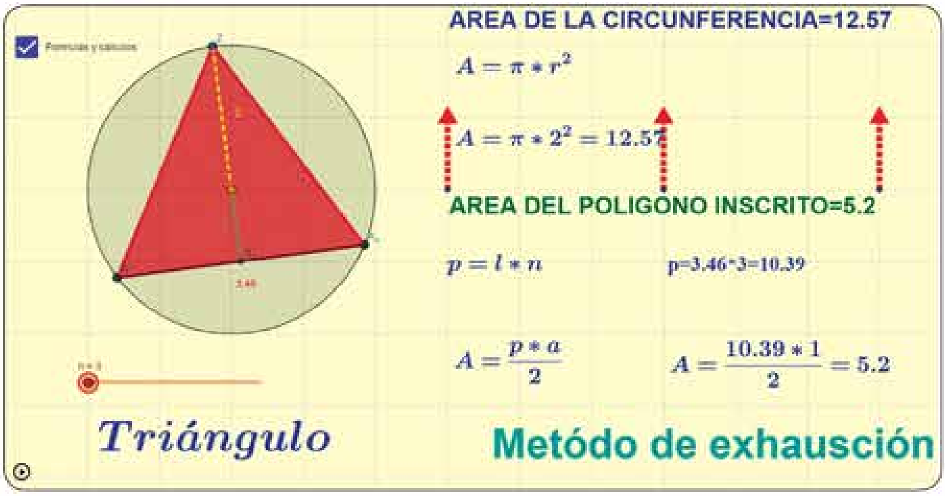
Posteriormente, Arquímedes de Siracusa, en el siglo III a.C., perfeccionó el método de agotamiento y realizó avances notables en el cálculo del área del círculo. Utilizó polígonos de hasta 96 lados para aproximar el área y estableció que el área de un círculo es igual al producto del radio al cuadrado por un valor que hoy conocemos como pi (π).

Arquímedes demostró que el valor de π se encuentra entre $3\ 1/7$ y $3\ 10/71$, proporcionando una de las primeras aproximaciones precisas de este número fundamental. Su trabajo en **"La medida del círculo"** estableció las bases para el desarrollo futuro del cálculo y las matemáticas modernas, y su método de agotamiento siguió siendo una herramienta crucial en el análisis matemático durante siglos.

Actividad 4 Visita el sitio https://www.geogebra.org/m/nysp8wgr, realiza las actividades y contesta las preguntas.

Visita el Sitio.
Visita el sitio https://www.geogebra.org/m/nysp8wgr

PROMOCIÓN DIGITAL



▶ Activa el apartado de fórmulas y cálculos, luego, mueve el valor de n para 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, y 20 lados del polígono inscrito en la circunferencia.

▶ Completa la siguiente tabla con los datos generados de los polígonos trazados.

Número de lados del polígono inscrito.	3	4	5	6	7	8	10	15	20	∞
Altura de los triángulos	1									
Área del polígono inscrito.	5.2									

a) ¿Cuál es el área del círculo de radio 2 aplicando la fórmula $A = \pi r^2$ considerando que $\pi = 3.1415$?

b) ¿Cuántos lados debería tener el polígono inscrito para que el área sea igual a la que se obtiene con la fórmula?

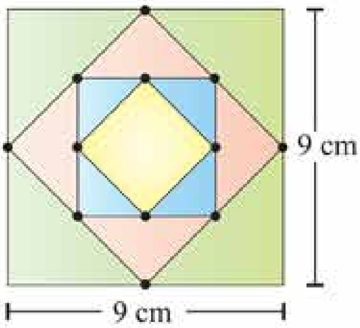
c) ¿Hacia qué valor se aproxima la altura de los triángulos cuando el lado del polígono es infinito?

d) ¿Qué similitudes encuentras en el proceso anterior con la situación de iluminar la mitad de cada región y así sucesivamente (situación inicial)?

Actividad 5 De manera individual, resuelve los siguientes ejercicios para retroalimentar tu aprendizaje en los procesos infinitos.

Cierre

a) Maribel decidió dibujar cuadrados dentro de un cuadrado que tiene de longitud 9 cm, así como se muestra en la siguiente figura:



Si Maribel continuara dibujando cuadrados, lo más pequeño posible, ¿a qué valor tiende la longitud del cuadrado más pequeño que se puede construir dentro del cuadrado grande?

b) Una de las paradojas de Zenón (filósofo griego del siglo V a.C.) es: "Un hombre parado en un cuarto no puede caminar hasta la pared. Para que esto suceda, primero avanzaría la mitad de la distancia, en seguida la mitad de la distancia restante y a continuación, una vez más la mitad de la que todavía queda. Siempre se puede continuar este proceso y nunca termina". Se sabe que el hombre llega a la pared, de modo que esto sugiere que quizá se pueda expresar la distancia total como la suma de una infinidad de distancias más pequeñas, como sigue:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}$$

¿Cuál es la suma de la serie infinita, es decir, cuando n es demasiado grande?

c) Escribe los cinco primeros términos de la sucesión, al calcular los valores de la expresión $2+\frac{1}{2^n}$ cuando $n=0,1,2,3$ y 4. Luego, determina el valor de la sumatoria cuando n sea tan grande como sea posible.

d) Escribe los cinco primeros términos de la sucesión, al calcular los valores de la expresión $3+\frac{1}{10^n}$ cuando $n=0,1,2,3$ y 4. Luego, determina el límite de la sucesión cuándo n sea tan grande como sea posible.

Cultura Digital

Conoce más...

Suma de una serie geométrica infinita.

Aplicación de Progresión Geométrica.

Actividad 6 De forma individual reflexiona sobre tus aprendizajes de la sesión, apoyate en los videos del apartado "Cultura Digital".

Fecha:

SESIÓN 02 Variación promedio e instantánea.

Duración: **100 minutos**

PROGRESIÓN 01

Genera intuición sobre **conceptos** como **variación promedio**, **variación instantánea**, procesos infinitos y movimiento a través de la revisión de las contribuciones que desde la filosofía y la matemática hicieron algunas y algunos personajes históricos en la construcción de ideas centrales para el origen del cálculo. **M1C2S1.**

Plan de clase

INICIO

30 minutos

Situación Problema. Preguntas o actividades de análisis. Exploración de la progresión.

1. Reúnete con 2 compañeros y realicen cada una de las actividades.
2. En plenaria, con la guía del profesor socialicen las respuestas de las preguntas y formulen dos conclusiones de los procesos realizados.

DESARROLLO

50 minutos

Acceso al conocimiento científico. Solución de problemas adicionales. Ejercitación

3. En equipos de tres personas, lean el texto "Velocidad promedio" y analicen la información.
4. En plenaria, comenten las posibles dudas que se hallan detectado en la explicación de los ejemplos y elaboren sus propias conclusiones.

CIERRE

20 minutos

Actividad de metacognición. Cuestionario de la progresión. Rúbrica de desempeño. Valoración de actividades de aprendizaje. Actividad de "Para conocer más"

5. De manera individual, resuelve los siguientes ejercicios para retroalimentar tu aprendizaje en la velocidad promedio e instantánea.
6. De forma individual reflexiona sobre tus aprendizajes de la sesión, apoyate en los videos del apartado "Cultura Digital".

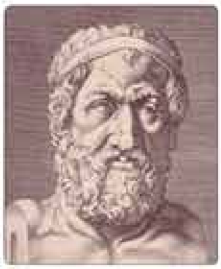
Recursos didácticos

- Útiles escolares.
- PC o Smartphone.
- Texto: Velocidad promedio e instantánea.

Actividad 1 Reúnete con 2 compañeros y realicen cada una de las siguientes actividades.

Aquiles y la tortuga

Inicio

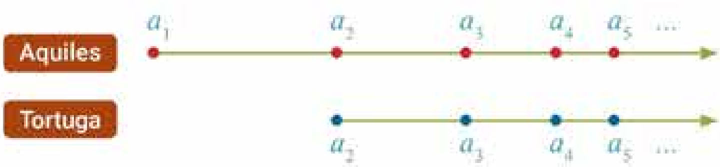


Zenón de Elea

En el siglo V a.C. el filósofo griego **Zenón de Elea** planteó cuatro problemas, actualmente son conocidos como Paradojas de Zenón, que fueron planteadas para cuestionar algunas de las ideas sobre el espacio y el tiempo que se estudiaban en esos días. La segunda paradoja de Zenón plantea la carrera entre el héroe griego **Aquiles y una tortuga** a la que se le ha dado cierta ventaja desde el inicio de ella. Zenón argumentaba que Aquiles nunca podría rebasar a la tortuga.

Supongamos que Aquiles empieza en la posición a_1 y la tortuga comienza en posición t_1, cuando Aquiles alcanza el punto $a_2 = t_1$, la tortuga está más adelante en la posición t_2. Cuando Aquiles llega a $a_3 = t_2$, la tortuga está en t_3 y así sucesivamente. De este modo pareciera que la tortuga estará siempre por delante de Aquiles. Sin embargo, la situación anterior no parece lógico al sentido común.

► La carrera entre Aquiles y la tortuga, puede mostrarse gráficamente en el siguiente dibujo:



► ¿Matemáticamente es posible que Aquiles nunca alcanzará a la tortuga? Si __ No ___
¿Por qué?

___

___

___

► En un contexto real, ¿lo anterior es posible? Si __ No ___
¿Por qué?

___

___

___

Consideren que la distancia que recorre Aquiles de a_1 hasta a_2 es 1 unidad y es el movimiento 1. Ahora, observa y completa la siguiente tabla de valores, luego, escribe las respuestas de cada una de las preguntas que a continuación se plantean.

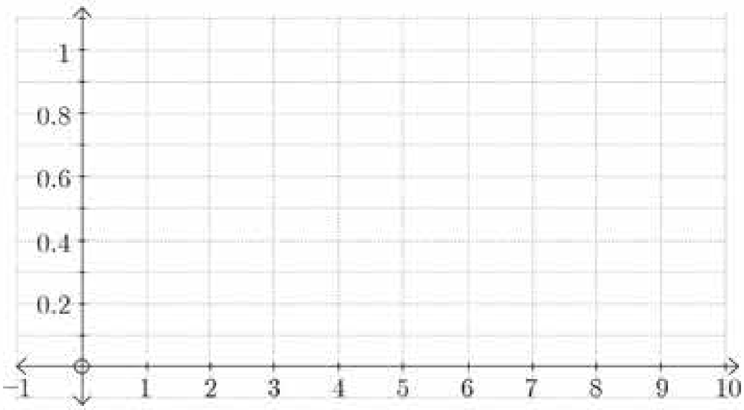
Número de movimiento.	1	2	3	4	5	6	7	8	...	∞
Distancia que recorre Aquiles.	1			$\frac{1}{8}$						
Distancia que recorre la tortuga.	$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{16}$						

a) ¿A qué valor se acerca la distancia que recorre Aquiles cuando el número de movimientos es demasiado grande o se acerca al infinito?

b) ¿Hacia qué valor se acerca la distancia que recorre la Tortuga conforme el número de movimientos se incrementa y es demasiado grande?

c) ¿Cuál es la razón por la cual la suma de las distancias que recorre Aquiles no es la misma que la suma de las distancias que recorre la tortuga en cualquier valor de a o t? Ver el dibujo de las distancias entre Aquiles y la tortuga.

Grafica en el siguiente plano cartesiano los valores de las distancias que recorren Aquiles y la tortuga y escribe como se muestran las respuestas de las interrogantes anteriores en el gráfico.



¿Por qué razón las curvas resultantes no tocan o interceptan el eje horizontal?

Actividad 2 En plenaria, con la guía del profesor socialicen las respuestas de las preguntas anteriores y formulen dos conclusiones de los procesos realizados.

Conclusión:

1 Las distancias no son iguales, porque...

Conclusión:

2 El número de movimientos son infinitos porque...

Desarrollo

Actividad 3 En equipos de tres personas, lean el texto "Velocidad promedio" y analicen la siguiente información.

Velocidad promedio.

Cuando se dice que un automóvil viaja a 90 kilómetros por hora, quiere decir, que después de viajar durante una hora se habrán recorrido 90 kilómetros, siempre y cuando la velocidad sea constante, pero, si la velocidad del automóvil varía, entonces, ¿qué significa decir que la velocidad en un instante dado es de 90km/h?

Ejemplo. 1 Observa la siguiente tabla y determina la velocidad promedio en el intervalo de 2 a 4 segundos.

Variable física.	Datos.					
t = Tiempo transcurrido (s)	0	1	2	3	4	5
d = Distancia recorrida (pies)	0	2	10	25	43	78

Solución:

1. Establecer la fórmula de la velocidad promedio durante el intervalo $2 \leq t \leq 4$:

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$$

2. Sustituir los valores de la tabla en la fórmula anterior:

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{43-10}{4-2} = 16.5\,\frac{\text{pies}}{s}$$

Ejemplo. 2 Hallar la velocidad promedio en el intervalo de tiempo $2 \leq t \leq 3$, a partir de la tabla anterior.

Solución:

Establecer los valores y sustituir en la fórmula:

$$\begin{aligned}\text{Velocidad promedio} &= \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}\\ &= \frac{25-10}{3-2}\\ &= 15\,\frac{\text{pies}}{s}\end{aligned}$$

Ejemplo. 3 Observa la siguiente tabla y calcula la velocidad promedio de los 2 a los 2.1 segundos.

Unidades físicas.	Datos.					
t	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
d	10.00	11.02	12.16	13.45	14.96	16.80

Solución: Establecer la fórmula para calcular la velocidad promedio en el intervalo y sustituir los valores:

$$\begin{aligned}\text{Velocidad promedio} &= \frac{11.02-10.00}{2.1-2.0}\\ &= 10.2\,\frac{\text{pies}}{s}\end{aligned}$$

Actividad 4 En plenaria, comenten las posibles dudas que se hallan detectado en la explicación de los ejemplos anteriores y elaboren sus propias conclusiones.

Por lo tanto, las velocidades promedio sobre intervalos sucesivamente más pequeños parecen aproximarse cada vez más a un número muy cercano a 10 por lo que se espera que la velocidad cuando $t = 2$ sea de $10\,\frac{\text{pies}}{s}$, por lo que se puede definir a la **velocidad instantánea** de un objeto en movimiento como el valor del **límite** de las velocidades promedio sobre intervalos cada vez más pequeños.

Actividad 5 De manera individual, resuelve los siguientes ejercicios para retroalimentar tu aprendizaje en la velocidad promedio e instantánea.

Cierre

a) Observa la siguiente tabla:

Variable física.	Datos.					
t = Tiempo transcurrido (s)	0	1	2	3	4	5
d = Distancia recorrida (pies)	0	4	20	50	86	156

1. ¿Cuál es la velocidad promedio en el intervalo de $2 \leq t \leq 4$?
2. ¿Cuál es la velocidad promedio en el intervalo de $0 \leq t \leq 3$?

b) Observa la siguiente tabla:

Variable física.	Datos.					
t = Tiempo transcurrido (s)	0	1	2	3	4	5
d = Distancia (km)	0	20	40	90	120	140

1. ¿Cuál es la velocidad promedio en el intervalo de $1 \leq t \leq 3$?
2. ¿Cuál es la velocidad promedio en el intervalo de $0 \leq t \leq 1$?

▶ Elaboren al menos dos conclusiones entre la diferencia de velocidad promedio y velocidad instantánea.

Cultura Digital

Conoce más...

› Velocidad media vs instantánea.

› Velocidad promedio y Velocidad instantánea.

Actividad 6 De forma individual reflexiona sobre tus aprendizajes de la sesión, apoyate en los videos del apartado "Cultura Digital".

RÚBRICA >>> ¡Valora tú desempeño!

PARCIAL 1

Variación promedio.

Nombre del(a) alumno(a):

Grado: Grupo: N. L.: Fecha:

Lee cada indicador detenidamente y, teniendo a la mano los resultados obtenidos en las evidencias de aprendizaje (progresión 1-5), coloca en la columna valoración el número que mejor describa el nivel de logro alcanzado, durante el desarrollo del parcial 1, de acuerdo con los siguientes criterios:

(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
No	Pocas veces	Algunas veces	Regularmente	Casi siempre	Siempre

	Indicadores	Valoración	Suma
Conocimientos	Logro definir con mis propias palabras lo que es una función real de variable real.		
	Logro definir con mis propias palabras lo que es un límite.		
	Domino las definiciones de continuidad, discontinuidad, pendiente, velocidad promedio e instantánea y las expresiones matemáticas que se usan para su cálculo.		
	Describo con mis palabras cada uno de los gráficos para representar límites de funciones.		
	Conozco y domino los teoremas de límites (sustitución directa), límites al infinito y límites en el infinito, y el cálculo de los mismos.		

	Indicadores	Valoración	Suma
Habilidades	Determino sin error cualquier límite de funciones de diferentes tipos.		
	Clasifico el tipo de límites y obtengo su valor de manera correcta.		
	Logro elaborar correctamente tablas descriptivas de límites y de aproximaciones necesarias para graficar los mismos y determinar su valor.		
	Represento, en forma correcta y de manera gráfica, los límites que se proponen a lo largo del parcial de estudio.		
	Entiendo y aplico el concepto de continuidad y discontinuidad.		
	Identifico gráficamente cuando una función salta o no está definida en uno de sus puntos, es decir, identifico cuando el límite no existe.		
	Identifico y aplico los límites laterales.		
	Identifico y resuelvo de manera correcta límites cuando la variable tiende al infinito.		
	Determino de manera correcta la continuidad o discontinuidad de una función en un punto dado.		
	Resuelvo de manera correcta las series de ejercicios propuestos en el parcial.		

	Indicadores	Valoración	Suma
Actitudes	Participo activa y responsablemente al trabajar en equipo.		
	Organizo en una carpeta las evidencias de aprendizaje propuestas y las entrego en tiempo y forma.		
	Realizo, durante todas las sesiones que comprende el parcial de estudio, todos los procedimientos matemáticos necesarios para resolver las situaciones, problemas o ejercicios planteados, y así poder construir mi propio aprendizaje.		
	Me aseguro de tener un amplio dominio de todos los temas del parcial 1, referentes a funciones, operaciones con funciones, límites y continuidad.		
	Propicio un ambiente sano de aprendizaje y retroalimento aquellas dudas que tengo sobre los temas del parcial 1.		

▶ Suma los puntos de cada aspecto y ubícalo en la siguiente tabla para conocer el **nivel de logro parcial** obtenido en el parcial 1.

	Insuficiente	Elemental	Bueno	Excelente
Conocimientos	Menor a 14	De 14 a 18	De 19 a 23	Mayor a 23
Habilidades	Menor a 28	De 29 a 36	De 37 a 46	Mayor a 46
Actitudes	Menor a 14	De 14 a 18	De 19 a 23	Mayor a 23

▶ Obtén la suma de todos tus puntajes y ubícala en la siguiente tabla para conocer el **nivel de logro general** obtenido en el parcial 1.

	Insuficiente	Elemental	Bueno	Excelente
Suma	Menor a 56	De 57 a 72	De 73 a 92	Mayor a 92

Fecha:

Evaluación del parcial 1.

Instrucciones
Lee cada uno de los enunciados y resuelve el planteamiento utilizando las operaciones pertinentes. Después, elige la opción que consideres correcta e ilumina en el círculo de la hoja de respuestas que se encuentra en los anexos del libro, en la columna correspondiente a la evaluación del Parcial 1. (Valor 100%) **Nota:** La hoja de respuesta se encuentra en los anexos del libro.

Duración: **100 minutos**

Observa el siguiente ejemplo.

E1. Es el resultado de la operación $4 - 12 \div 3 + 2\,(5 - 2)$.

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12

En la hoja de respuestas se rellena completamente el alveolo **A**.

Hoja de respuesta.

E1. ● B C D

1. ¿Cuál es la rama de las matemáticas que opera con las diferencias infinitamente pequeñas de las cantidades variables?

a) Aritmética b) Álgebra

c) Calculo diferencial. d) Cálculo Integral

2. ¿Cuál es el principal objeto de estudio en el cálculo diferencial?

a) La suma b) La derivada

c) La resta d) La integral

3. Es el tipo de velocidad que se obtiene al dividir el desplazamiento entre el tiempo transcurrido.

a) Velocidad Instantánea.
b) Velocidad promedio.
c) Velocidad relativa.
d) Aceleración.

4. Nombre de la recta que toca en un sólo punto a una curva y sin cruzar en ella.

a) Tangente b) Secante

c) Paralela d) Diámetro

5. Es el punto al que tiende una función dentro de un rango y dominio previamente establecido, pero, que nunca toca.

a) Aceleración b) Derivada

c) Límite d) Velocidad

6. ¿Cuál es la fórmula matemática que se utiliza para obtener la velocidad promedio de un móvil?

a) $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ b) $v = \dfrac{d}{t}$

c) $v = \dfrac{s}{d}$ d) $v_m = \dfrac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$

7. ¿Cuál es la fórmula matemática que se utiliza para representar el límite de una función?

a) $f(x) = c$ b) $\dfrac{dy}{dx} = \infty$

c) $v_m = \dfrac{f_1 - f_2}{d}$ d) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

8. ¿Cuál es el límite de $f(x) = (x+2)^2$ cuándo $x \to -1$?

a) -1 b) 3

c) 1 d) 2

9. Es el valor del siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 10} (5) =$

a) 10 b) 5

c) 3 d) 0

10. Es el valor del siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 10} (x) =$

a) 10 b) -10

c) x d) 9

11. Es el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to 2}\left[\left(3x^2-5\right)-\left(-2x+1\right)\right]=$$

a) 10 **b)** −3

c) −21 **d)** 4

12. Es el valor del siguiente límite: $\lim_{x\to 3}\left[\frac{(6x-3)}{(x+2)}\right]=$

a) 3 **b)** −3

c) 45 **d)** 20

13. Es la ecuación de la pendiente de la recta que es tangente a la parábola $\left(y=x^2\right)$ en el punto $P(2,4)$.

a) $y=4x$ **b)** $y=4x-4$

c) $y=4x+x$ **d)** $y=4$

14. ¿Cuál es el límite de la función $\lim_{x\to 0}\left(\frac{6}{x^2}\right)$?

a) $-\infty$ **b)** ∞

c) $\pm\infty$ **d)** 0

15. ¿Cuál es el límite de la función $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}\right)$?

a) $-\infty$ **b)** $\pm\infty$

c) ∞ **d)** 0

16. ¿Cuál es el resultado del $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-1}{7x^3+2x+5}\right)$?

a) 3/7 **b)** 0

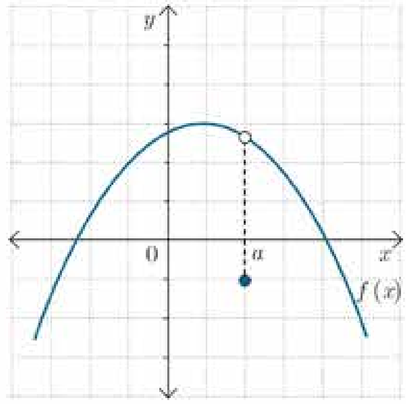
c) 7/3 **d)** 1/2

17. ¿Cuál es el resultado del $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$?

a) 0 **b)** 1

c) ∞ **d)** No existe.

18. A partir de la siguiente gráfica, ¿para qué valor de x la gráfica es discontinua?



a) $x = 10$ **b)** $x = a$

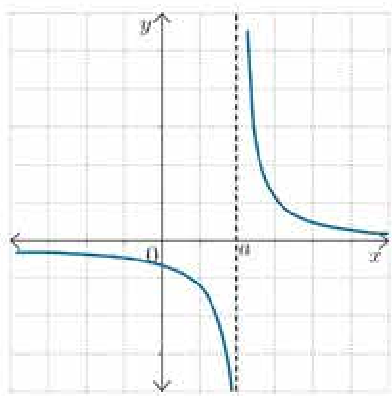
c) $x = f(x)$ **d)** $x = \infty$

19. ¿Cuál es el límite de la siguiente sucesión: 3,6,9,12,15,18,24.....?

a) $+\infty$ **b)** $-\infty$

c) 3 **d)** 100 000 000

20. A partir de la siguiente gráfica, ¿cómo se llama la recta punteada donde la función no existe o se indefine?



a) Recta tangente.

b) Recta secante.

c) Asintota.

d) Pendiente