



Colección del
pensamiento
matemático

II

Temas Selectos de Matemáticas II

Pensamiento Geométrico Analítico

■ Ramiro González Cárdenas



*"Una editorial que muestra como
aprender a aprender matemáticas
para la vida"*

Temas Selectos de Matemáticas II

Pensamiento Geométrico Analítico



RAMIRO GONZÁLEZ CÁRDENAS

EDITORIAL EM² YLC

"UNA EDITORIAL QUE MUESTRA COMO APRENDER A DESARROLLAR EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO"



SERIE: COLECCIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO.

Temas Selectos de Matemáticas II

Pensamiento Geométrico Analítico

Ramiro González Cárdenas

Primera Edición: agosto de 2025

Editorial EM²YLC

Impreso en México

Diseño editorial:
Arturo Romero Lucas

Diseño de portada:
Bertín Cova Cruz

Ilustración de interiores:
Andrea Pastor López
Nadia Jatziry Cruz Romero
José Alberto González Pacheco

Revisión técnica:
Grupo Editorial EM²YLC

✉ ed.em2ylc@gmail.com

📘 Editorial Em2ylc México

☎ 712 289 60 40



Derechos reservados de acuerdo con lo establecido en la Ley Federal de Derechos de Autor. La presentación y disposición en conjunto de esta obra: Temas Selectos de Matemáticas II, Pensamiento Geométrico Analítico, basado en el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS) de la Nueva Escuela Mexicana (NEM), son propiedad del editor.

Queda estrictamente prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, así como de su transmisión en cualquier forma o por cualquier medio, sea éste electrónico, mecánico, fotográfico o fotocopiado, por grabación u otros medios, sin autorización por escrito del editor.

D.R. 2025 Editorial Em²ylc
San Lorenzo Tlacotepec, Atlacomulco, México.

Cuando pienso en mi México lindo y querido,
me imagino a un país intercultural, inclusivo, equitativo
y preparado para enfrentar los retos de la vida.

Que haya tenido la osadía de editar matemáticas
para todo México, es un honor y un privilegio para mí,
y no encuentro las palabras idóneas
para agradecer por tantas experiencias enriquecedoras.

Sólo espero que este granito de arena
sirva para que tu vida sea transformadora
y contribuya a una sociedad armónica y de paz.

Ramiro González Cárdenas.
Por el simple orgullo de ser mexicano.



PRESENTACIÓN

NUEVA
ESCUELA
MEXICANA



Los principios de la Nueva Escuela Mexicana (NEM), tienen como objetivo promover el aprendizaje de excelencia, inclusivo, intercultural y equitativo a lo largo de la formación del bachiller. Garantizar el derecho a la educación llevando a cabo las cuatro condiciones necesarias: asequibilidad, accesibilidad, aceptabilidad y adaptabilidad.

Como consecuencia de lo anterior, este libro de texto: Temas Selectos de Matemáticas II: Pensamiento Geométrico Analítico, se ha vinculado con estos principios, los cuales son perceptibles desde el enfoque del aprendizaje situado a partir de la implementación de diversas estrategias que buscan ajustarse a los diferentes contextos de cada región de la República Mexicana, ayudando al estudiantado en el desarrollo de las habilidades matemáticas, habilidades socioemocionales y proyecto de vida, para lograr el perfil de egreso del Nivel Medio Superior.

Para alcanzar todo lo anterior y contribuir al logro del perfil de egreso, el libro de texto, se ha estructurado en 27 Temas Selectos de Geometría Analítica y tres evaluaciones parciales, además, contempla la semana de encuadre-diagnóstico, la entrega de calificaciones finales y/o regularización.

En otras palabras, el libro de texto ha sido divididos en tres parciales:

Parcial 1. El plano cartesiano y la recta.

Parcial 2. La parábola, la circunferencia y la elipse.

Parcial 3. La hipérbola, rotación y traslación de ejes.

Además de la teoría matemática, los ejemplos prácticos y la retroalimentación de los aprendizajes, se incluyen las evaluaciones: diagnóstica, parcial 1, parcial 2 y parcial 3, videos tutoriales y las rúbricas de desempeño académico por parcial. Todo lo anterior, con el propósito de acompañar al estudiante durante su formación académica en el desarrollo de las habilidades del pensamiento matemático para la vida y como consecuencia, formar un estudiante de bachiller con conocimientos y valores, mismos que le servirán para integrarse a una sociedad productiva y transformadora.

Este libro de texto, sirve como una guía didáctica (escrita y digital) organizada, de manera clara, de tal forma que todos los actores que participan en el proceso enseñanza - aprendizaje puedan identificar el objetivo que se pretende alcanzar en cada uno de los temas y en su conjunto.

En resumen, en este libro de texto, el docente y el estudiante harán uso de la metodología de las 5E's propuestas por la Nueva Escuela Mexicana (NEM) y dirigir tanto la práctica docente como el aprendizaje en el Pensamiento Geométrico Analítico.

CONSIDERACIONES:

El perfil de egreso de las y los estudiantes, en el Recurso Sociocognitivo de Pensamiento Matemático queda referido en el currículum bajo los siguientes aprendizajes de trayectoria:

1. Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados, para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.
2. Adapta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades, y de la vida cotidiana).
3. Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.
4. Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

ÍNDICE

Presentación	Pág. 05
Índice	Pág. 06
Evaluación diagnóstica	Pág. 10

PARCIAL 1

El plano
cartesiano y
la recta

Progresión 1	1. Sistema de coordenadas rectangulares y lugar geométrico	Pág. 12
Progresión 2	2. Distancia entre dos puntos	Pág. 18
	3. Pendiente de una recta	Pág. 22
	4. Ángulo entre dos rectas	Pág. 26
Progresión 3	5. Ecuación general de la recta	Pág. 30
	6. Ecuación de la recta: punto – pendiente	Pág. 34
	7. Ecuación de la recta: pendiente – ordenada al origen y simétrica	Pág. 38
Progresión 4	8. Distancia de una recta a un punto	Pág. 44
	9. Variación directamente e inversamente proporcional	Pág. 48
	10. Evaluación del Parcial 1	Pág. 52
	Rúbrica de desempeño académico del Parcial 1 (Autoevaluación)	Pág. 54

PARCIAL 2

La parábola, la
circunferencia
y la elipse

Progresión 5	11. Definición y elementos de la parábola	Pág. 56
	12. Ecuación reducida de la parábola	Pág. 60
	13. Ecuación general de la parábola	Pág. 64
Progresión 6	14. Ecuación reducida de la circunferencia con $C(0, 0)$	Pág. 68
	15. Ecuación reducida de la circunferencia con $C(h, k)$	Pág. 72
	16. Ecuación general de la circunferencia	Pág. 76
Progresión 7	17. Definición y elementos de la elipse	Pág. 80
	18. Ecuación reducida de la elipse con centro $C(h, k)$	Pág. 86
	19. Ecuación general de la elipse	Pág. 92
	20. Evaluación del Parcial 2	Pág. 96
	Rúbrica de desempeño académico del Parcial 2 (Autoevaluación)	Pág. 98

PARCIAL 3

La hipérbola,
rotación y
traslación de
ejes

Progresión 8	21. Definición y elementos de la hipérbola	Pág. 100
	22. Ecuación reducida de la hipérbola con $C(h, k)$	Pág. 106
	23. Ecuación general de la hipérbola	Pág. 110
	24. Las esferas de Dandelin	Pág. 114
Progresión 9	25. Transformaciones geométricas: traslación, rotación y reflexión	Pág. 118
Progresión 10	26. Coordenadas polares	Pág. 126
	27. Evaluación del Parcial 3	Pág. 134
	Rúbrica de desempeño académico del Parcial 3 (Autoevaluación)	Pág. 136
	Bibliografía	Pág. 143

¡CONOCE TU LIBRO!

En esta sección conocerás todos los elementos con los cuales está conformado tu libro. Están diseñados para que te acerquen al conocimiento de manera lúdica y entretenida.

Este libro se estructura con base en los temas indicados en los nuevos programas educativos, los contenidos están diseñados y acorde para apoyar a cada sesión en el progreso de enseñanza y aprendizaje del pensamiento matemático.

24. Las esferas de Dandelin

8

Investiga en equipo de cuatro personas el uso de los Dandelin spheres en la geometría. Analiza la relación entre la geometría y la física. Investiga en equipo de cuatro personas el uso de los Dandelin spheres en la geometría. Analiza la relación entre la geometría y la física. Investiga en equipo de cuatro personas el uso de los Dandelin spheres en la geometría. Analiza la relación entre la geometría y la física.

Explorar: Investigar de manera digital.

Enganchar: Captar la atención de los estudiantes.

Número de la progresión de estudio.

Título del tema.

Las esferas de Dandelin

Las esferas de Dandelin son esferas que se utilizan para demostrar que la intersección de un plano con un cono es una elipse. Se introducen conceptos y terminología formal.

Elaborar: Aplicar lo aprendido.

Evaluar: Valorar el aprendizaje.

Evaluaciones

Evaluación Diagnóstica

Indicador: Conocer el nivel de conocimientos previos de los estudiantes en el área de matemáticas.

- ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un triángulo?
- ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un cuadrado?
- ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un pentágono?
- ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un hexágono?
- ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un heptágono?
- ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un octógono?
- ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un nonágono?
- ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un decágono?
- ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un undécagono?
- ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un dodecágono?

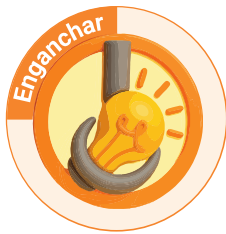
La evaluación diagnóstica se presenta al inicio del libro e identifica el conocimiento previo y las habilidades de los estudiantes, permitiendo a las y los docentes adaptar sus estrategias de enseñanza.

La presentación de los contenidos, así como las actividades propuestas, permiten a las y los docentes el poder implementar una evaluación formativa continua, con el objeto de monitorear el progreso y proporcionar retroalimentación a los estudiantes, facilitando ajustes en la enseñanza y mejorando la comprensión y habilidades de los estudiantes.

Finalmente, al concluir cada parcial, se aplica la evaluación sumativa para medir el dominio de los conceptos enseñados, proporcionando una valoración concluyente del aprendizaje que informa sobre el desempeño académico y la efectividad de la instrucción. Estas evaluaciones, en conjunto, garantizan una enseñanza adaptativa, un aprendizaje reflexivo y una medición precisa del progreso estudiantil.

La Nueva Escuela Mexicana y el Modelo Pedagógico de las 5 Es

Con el objetivo de proporcionar una educación científica que prepare a las y los estudiantes con suficiente conocimiento básico para que puedan seguir aprendiendo a lo largo de su vida, la enseñanza de las ciencias se enfoca en un conjunto limitado de conceptos centrales que son fundamentales y que apoyan su aprendizaje, junto con el modelo pedagógico de las 5 Es, el cual está basado en la investigación respecto a la efectividad de los ciclos de aprendizaje utilizados en la enseñanza de la ciencia y retoma los principios constructivistas del aprendizaje (Bybee, 2015).



Tiene como objetivo **captar la atención de los estudiantes y activar sus conocimientos previos**. En esta fase, se presenta un estímulo que despierte su curiosidad y los motive a aprender más sobre el tema. Por ello, se presenta una situación contextual, que les permita conectar el nuevo contenido con las experiencias y conocimientos previos, preparándolos mental y emocionalmente para el aprendizaje.



Se brinda a los estudiantes la **oportunidad de investigar y experimentar de manera práctica y autónoma**. Esta etapa fomenta la exploración activa y la colaboración en pequeños grupos, permitiendo que manipulen materiales, observen fenómenos y recopilen datos. Es crucial en esta fase que los estudiantes descubran conceptos y formulen hipótesis a través de la experimentación y la observación directa.



Se introducen **conceptos y terminología formal**, conectando las experiencias prácticas de los estudiantes con el conocimiento científico. Se explican los conceptos de manera clara con el objetivo de reforzar las ideas correctas, proporcionando una base sólida de entendimiento. Así, los estudiantes articulan su comprensión y formulan conceptos claros basados en sus experiencias de exploración.



Los estudiantes se enfrentan a **actividades adicionales** que les desafían a aplicar lo aprendido a situaciones nuevas y más complejas. Esta etapa fomenta el pensamiento crítico y la resolución de problemas, y conecta el contenido aprendido con otras áreas del conocimiento y situaciones de la vida real. Es una oportunidad para que los estudiantes vean la relevancia y aplicabilidad de lo que han aprendido.



Esta etapa tiene como objetivo **valorar el aprendizaje de los estudiantes y proporcionar una retroalimentación**. Por ello se incluyen evaluaciones tanto formativas como sumativas, que puedan tomar la forma de rúbrica, proyectos, prácticas y autoevaluaciones. De esta manera reflexionan sobre su propio aprendizaje, identifican áreas de mejora y reciben retroalimentación que les ayuda a progresar.

Cabe mencionar que la evaluación debe ser continua, por lo que puede ocurrir en cualquier etapa del proceso, asegurando que los estudiantes estén comprendiendo y reteniendo la información de manera efectiva.



Parcial

1

El plano cartesiano y la recta

Progresiones de aprendizaje en este parcial

Progresión

1

Intuye la trayectoria de objetos que se mueven en dos dimensiones y las describe heurísticamente a través del uso de **sistemas coordenados cartesianos**. De ser posible empleando software como Tracker y GeoGebra que le permita rastrear el movimiento de dichos objetos.

Progresión

2

Describe algebraicamente algunas **trayectorias, lugares geométricos o regiones en el plano** empleando ecuaciones e inequaciones con dos incógnitas o relaciones de distancia y ángulo entre puntos y rectas del plano cartesiano.

Progresión

3

Deduce **propiedades geométricas** (simetría, extensión, etc.) de curvas planas, a partir de sus **expresiones algebraicas**, considerando que polinomios de dos variables con coeficientes reales tienen un conjunto solución que puede graficarse en el plano cartesiano.

Progresión

4

Emplea **métodos gráficos** para entender el comportamiento de dos variables que estén en relación de proporcionalidad directa para deducir la ecuación de la recta que pasa por el origen y posteriormente trabajar el caso general de una recta en el plano.



Evaluación Diagnóstica

Instrucciones: Lee detenidamente cada una de las siguientes cuestiones, después, elige la opción que conteste correctamente cada una de las preguntas, enseguida, rellena el círculo en la hoja de respuestas y que corresponda a la pregunta en la columna de "Evaluación diagnóstica". ■ **Nota:** La hoja de respuesta se encuentra en los anexos del libro.

1. Rama de las Matemáticas que estudia las propiedades y las características de las figuras en un plano o en el espacio y sus relaciones.

- A) Geometría
- B) Álgebra
- C) Aritmética
- D) Estadística

2. Rama de las Matemáticas que se encarga del estudio de las operaciones en su forma general empleando números y letras para representarlas.

- A) Geometría analítica
- B) Álgebra
- C) Geometría
- D) Trigonometría

3. Rama de las Matemáticas que combina el estudio del Álgebra y la Geometría plana.

- A) Geometría espacial
- B) Geometría plana
- C) Geometría analítica
- D) Física

4. Polígono regular que tiene tres lados y tres ángulos.

- A) Cuadrado
- B) Círculo
- C) Rectángulo
- D) Triángulo

5. ¿Cuántos puntos son necesarios y suficientes para construir una recta?

- A) 1
- B) 3
- C) 5
- D) 2

6. Nombre que recibe el grado de inclinación de una recta con respecto a la parte positiva del eje de las abscisas (x).

- A) Ángulo
- B) Pendiente
- C) Recta
- D) Vértice

7. Nombre que recibe la gráfica de una función lineal o de primer grado.

- A) Recta
- B) Parábola
- C) Senoide
- D) Circunferencia

8. Nombre que recibe la gráfica de una ecuación cuadrática o de segundo grado.

- A) Recta
- B) Parábola
- C) Cosenoide
- D) Senoide

9. Fórmula que se utiliza para hallar el área de cualquier círculo.

- A) $A = \pi r^2$
- B) $A = \pi r$
- C) $A = 2\pi r$
- D) $A = \frac{1}{2}\pi r^2$

10. ¿Cuál es el valor de x , de la ecuación de primer grado $5x + 3 = 13x - 13$?

- A) $x = 2$
- B) $x = 1$
- C) $x = 3$
- D) $x = -2$

11. Raíces o soluciones de la ecuación cuadrática: $x^2 + 5x + 6 = 0$.

- A) $x_1 = -3, x_2 = -2$
- B) $x_1 = 3, x_2 = -2$
- C) $x_1 = -3, x_2 = 2$
- D) $x_1 = 3, x_2 = 2$

12. Ecuación que se obtiene al despejar a y de la expresión $2x - 3y = 6$.

- A) $y = \frac{2}{3}x - 2$
- B) $y = \frac{2}{6}x - 2$
- C) $y = \frac{2}{3}x - 3$
- D) $y = \frac{1}{3}x - 1$

13. ¿Cuál es el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo si sus catetos miden 5 cm y 8 cm?

- A) $c = \sqrt{39}$ cm
- B) $c = \sqrt{85}$ cm
- C) $c = \sqrt{79}$ cm
- D) $c = \sqrt{89}$ cm

14. Juan Luis tiene un terreno rectangular que mide 25 m de largo y 12 m de ancho, ¿cuál es el área que ocupa el terreno?

- A) $A = 300 \text{ m}^2$
- B) $A = 272 \text{ m}^2$
- C) $A = 260 \text{ m}^2$
- D) $A = 320 \text{ m}^2$

15. Antonia Flores Rodríguez es diseñadora de manteles para mesas que se utilizan en eventos especiales. ¿Qué cantidad de tela se ocupará para cubrir la superficie de una mesa circular de 2.5 m de diámetro? considera que $\pi = 3.14$

- A) $A = 4.90 \text{ m}^2$
- B) $A = 6 \text{ m}^2$
- C) $A = 3.50 \text{ m}^2$
- D) $A = 2.5 \text{ m}^2$

16. Ana Luisa posee un terreno cuadrangular que tiene una área de 400 m^2 , ¿cuál es la longitud de cada uno de los lados del terreno?

- A) 100 m
- B) 40 m
- C) 20 m
- D) 10 m

17. Si un cubo Rubik tiene tres cubitos de largo, ancho y alto, ¿cuántos cubitos tiene el cuerpo geométrico en total?

- A) 17
- B) 9
- C) 27
- D) 18

18. ¿Cuánto es $\frac{1}{4}$ de 12000 m^2 ?

- A) $9\,000 \text{ m}^2$
- B) $6\,000 \text{ m}^2$
- C) $4\,000 \text{ m}^2$
- D) $3\,000 \text{ m}^2$

19. ¿Cuál es el producto del binomio al cuadrado $(x-3)^2$?

- A) $x^2 - 6x + 9$
- B) $x^2 + 6x + 9$
- C) $x^2 - 9$
- D) $x^2 + 9$

20. ¿Cuál es el resultado de factorizar la diferencia de cuadrados $x^2 - 9$?

- A) $(x-3)(x+3)$
- B) $(x-3)(x-3)$
- C) $(x-1)(x+9)$
- D) $(x-9)(x+1)$



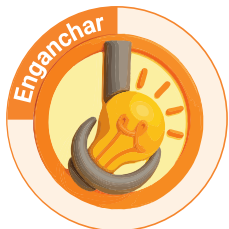


1. Sistema de coordenadas rectangulares y lugar geométrico

PROGRESIÓN

1

Intuye la trayectoria de objetos que se mueven en dos dimensiones y las describe heurísticamente a través del uso de **sistemas coordenados cartesianos**. De ser posible empleando software como Tracker y GeoGebra que le permita rastrear el movimiento de dichos objetos. **C2M2**



- 1 De manera individual, localiza los siguientes puntos de coordenadas en el plano cartesiano, luego, únelos de manera consecutiva. Por ejemplo, *A* con *B*, *B* con *C* y así sucesivamente hasta formar una figura geométrica.

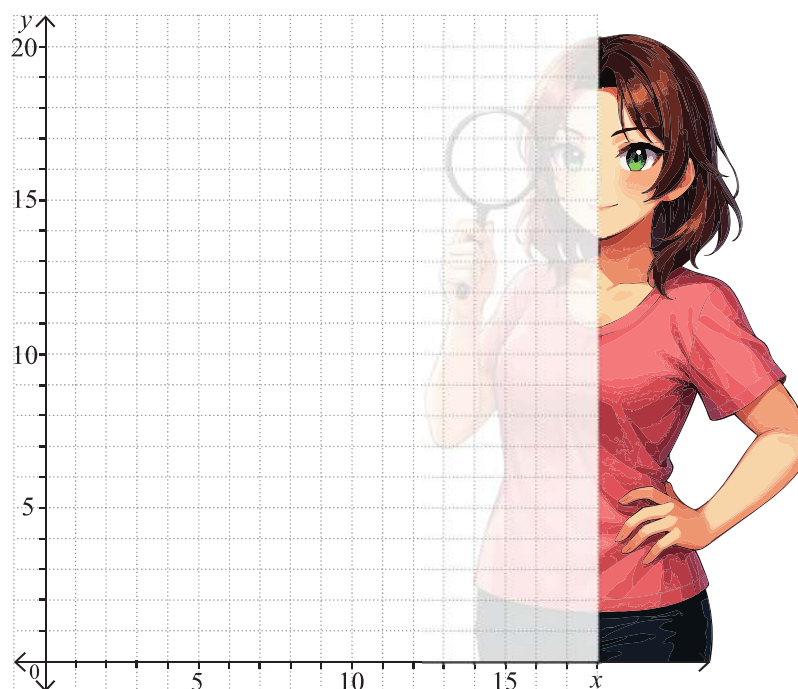
¡Buscando puntos!

- Localizar y unir los siguientes grupos de puntos:

<i>A</i> (0, 0)	<i>G</i> (8, 20)
<i>B</i> (16, 0)	<i>H</i> (2, 14)
<i>C</i> (16, 8)	<i>I</i> (0, 12)
<i>D</i> (14, 8)	<i>J</i> (2, 8)
<i>E</i> (14, 14)	<i>K</i> (0, 8)
<i>F</i> (16, 12)	Unir <i>A</i> con <i>K</i>

<i>L</i> (6, 10)	<i>O</i> (8, 16)
<i>M</i> (10, 10)	<i>P</i> (6, 14)
<i>N</i> (10, 14)	Unir <i>P</i> con <i>L</i>

<i>Q</i> (10, 0)	<i>S</i> (5, 6)
<i>R</i> (10, 6)	<i>T</i> (5, 0)



- En plenaria, respondan las siguientes preguntas:

1. ¿Qué imagen se obtiene al unir todos los puntos de coordenadas en el plano cartesiano?
2. ¿Para qué sirve el plano cartesiano en la vida cotidiana?



- 2 Para seguir aprendiendo más sobre el plano cartesiano, se recomiendan los siguientes videos tutoriales.



[Sistema de coordenadas cartesianas. Localizar puntos.](#)



[Dibujando un gato en el plano cartesiano con coordenadas.](#)

La Geometría

3 El término **geometría** tiene dos raíces griegas **geo** (tierra) y **metrón** (medida). Ambas palabras dan origen a la definición **medida de la tierra**.

Entre los tipos de geometría más destacables se encuentran: Geometría euclidiana (plana y del espacio), Geometría no euclidiana, Geometría algebraica, **Geometría analítica**, Geometría clásica, Geometría descriptiva, Geometría diferencial, Geometría proyectiva, entre otras.

La Geometría analítica fue iniciada y desarrollada por el matemático y filósofo francés **René Descartes** (1596 – 1650). Es una de las disciplinas matemáticas cuya característica principal es analizar las figuras geométricas a partir de un sistema de coordenadas y valiéndose de métodos propios del análisis matemático y del álgebra; es decir, establece una relación biunívoca que permite asociar a cada curva o superficie con una ecuación o igualdad matemática y viceversa (dos problemas fundamentales de la Geometría analítica).



René Descartes



Sistema de coordenadas rectangulares

El **plano cartesiano** es llamado así en honor a René Descartes. Se define como el arreglo de dos rectas perpendiculares $\bar{x}$ y $\bar{y}$ que se extienden al infinito, el punto de intersección o cruce es conocido como origen (O).

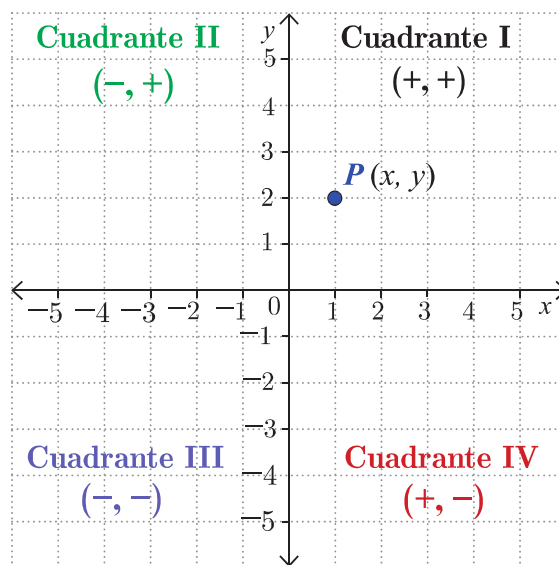
El plano cartesiano está dividido en cuatro cuadrantes que son numerados en sentido contrario a las manecillas del reloj. A este plano también se le conoce como plano bidimensional o **sistema de coordenadas rectangulares**.

► Los valores del eje horizontal x son conocidos como **abscisas** y los del eje vertical y como **ordenadas**.

Características de un plano cartesiano:

Un punto de coordenadas $P(x, y)$ no tiene dimensiones (largo, ancho, alto), sino que sólo expresa una posición en el plano.

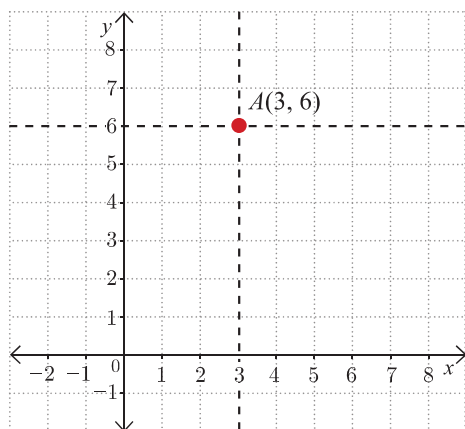
El plano cartesiano es considerado como un sistema de referencia donde se pueden ubicar puntos de coordenadas $P(x, y)$ donde x y y pertenecen al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.



Ejemplo 1

Localizar y trazar el punto $A(3, 6)$ en el plano cartesiano.

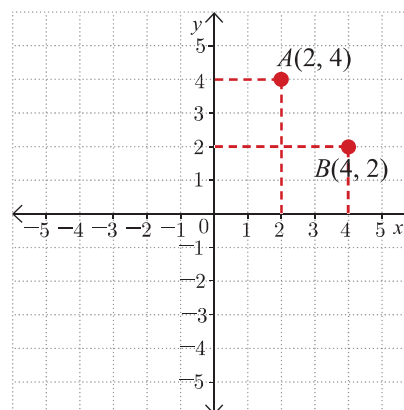
Solución:



Ejemplo 2

Dos parejas de números reales determinan puntos iguales si y sólo si las abscisas y las ordenadas son iguales y se escriben en el mismo orden. Por ejemplo, la pareja $A(2, 4)$ es distinta de la pareja $B(4, 2)$.

Solución:



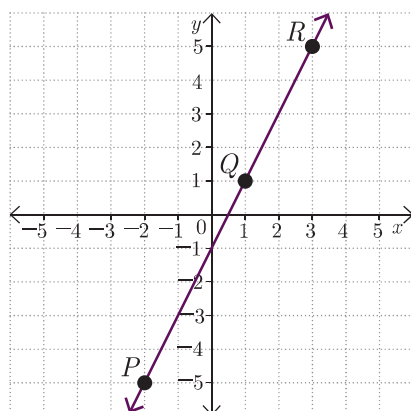
Lugar Geométrico

Se le conoce como **lugar geométrico** al conjunto de puntos en el plano (o espacio) que cumplen una condición o propiedad geométrica específica. En otras palabras es la **gráfica** que resulta cuando se presentan todos los puntos que satisfacen una determinada regla geométrica (ecuación).

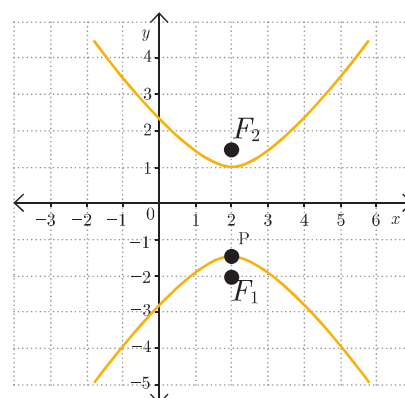
“Si los puntos se ubican en un plano coordenado, cualquier condición sobre los mismos concluye como una relación entre su abscisa y su ordenada”.

- ▶ Una **gráfica**, es una representación visual mediante dibujos, líneas (rectas o curvas), símbolos o figuras.
- ▶ Son **lugares geométricos**: la recta, la parábola, la circunferencia, la elipse, la hipérbola entre otras representaciones.

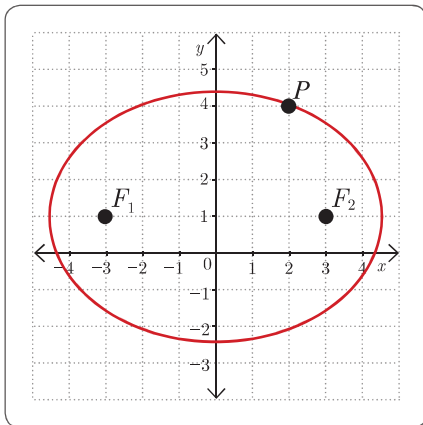
Recta



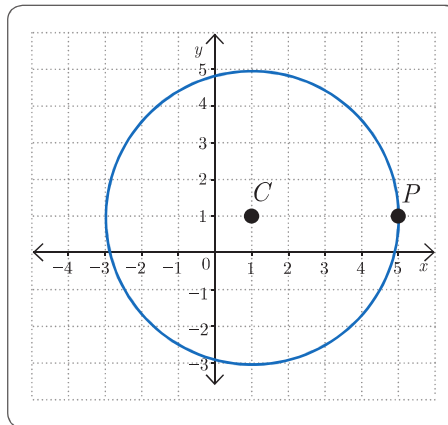
Hipérbola



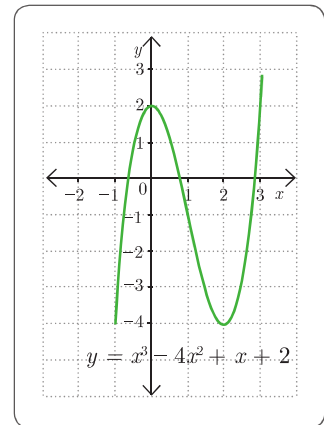
Elipse



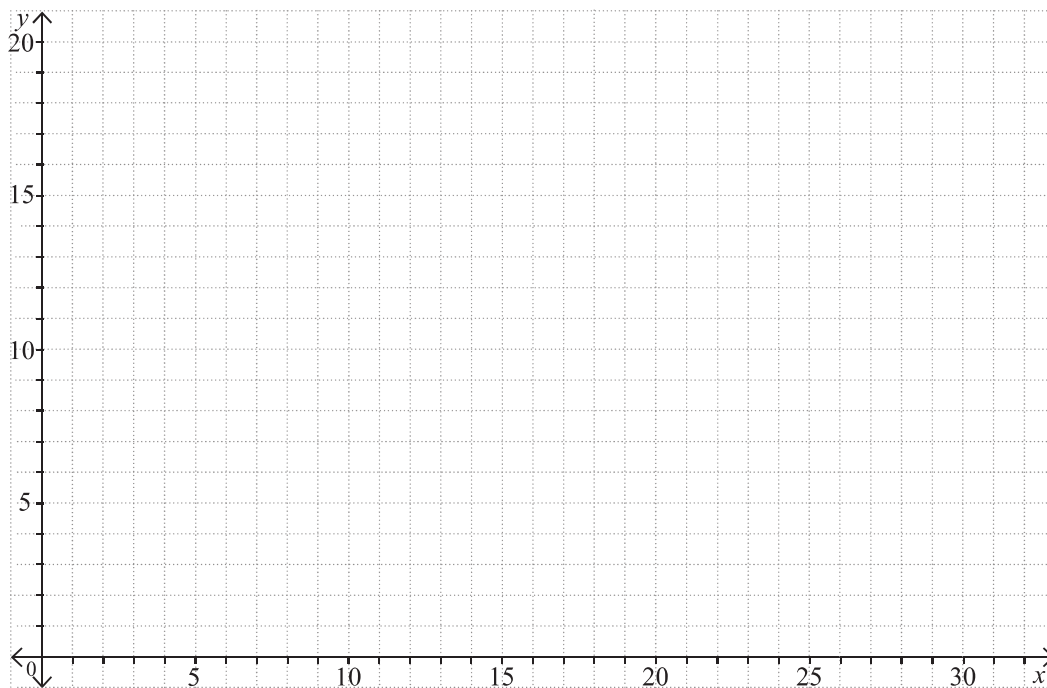
Circunferencia



Función polinomial



- 4 En el siguiente plano cartesiano, dibuja, por ejemplo, (una casa, un auto, una mesa, una ventana, entre otros). Luego, une los puntos hasta formar el dibujo o gráfico, después, localiza los puntos de coordenadas y ordenalos en grupos.



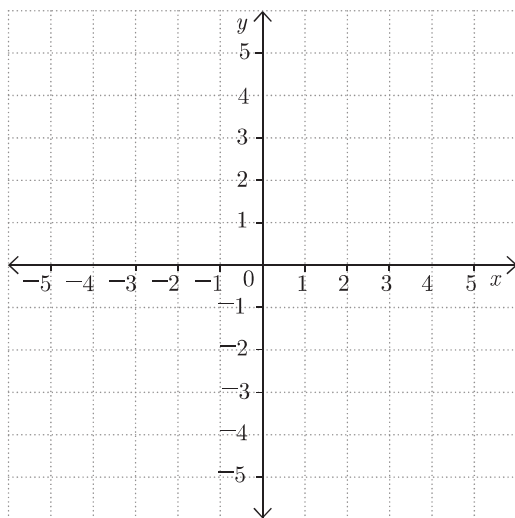
En este espacio puedes escribir todos los puntos de coordenadas que se requieren para formar el dibujo o gráfica.



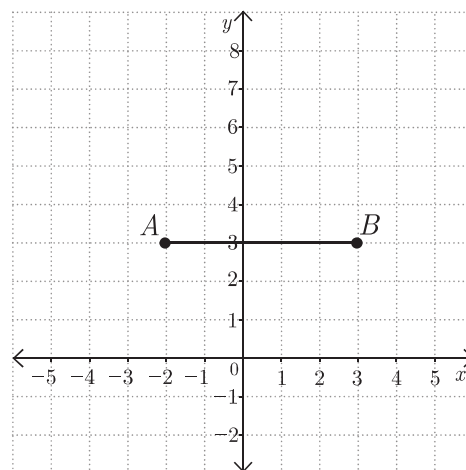
5 De manera individual, resuelve los siguientes ejercicios.

1. Localizar los siguientes puntos de coordenadas en el plano cartesiano.

$A(1, 5)$, $B(-4, 3)$, $C(-3, -1)$, $D(2, -4)$

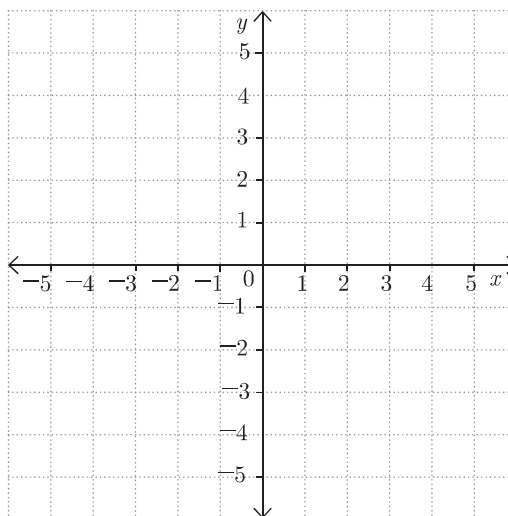


2. En la siguiente gráfica, traza dos puntos de coordenadas para formar un cuadrado.



3. Observar el esquema con datos, enseguida, completa la tabla y localízalos en la gráfica:

Coordenada $P(x, y)$	Abscisa (x)	Ordenada (y)	Cuadrante
A (3, 1)	3	1	I
B (-5, 2)	-5		
C (__, __)	-1	-1	
D (__, -3)	3		

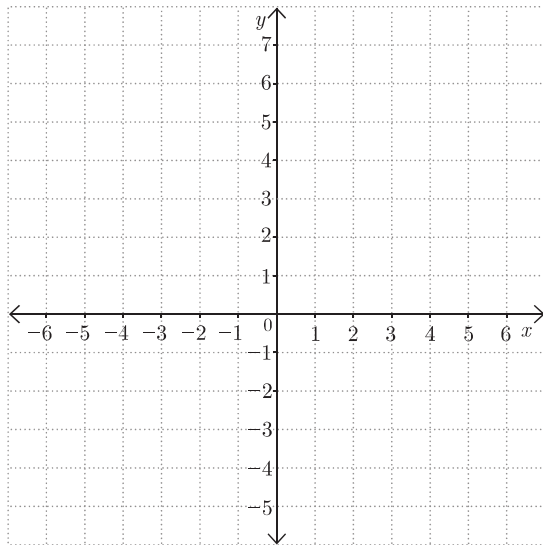


4. Observa los datos proporcionados, luego, completa las tablas:

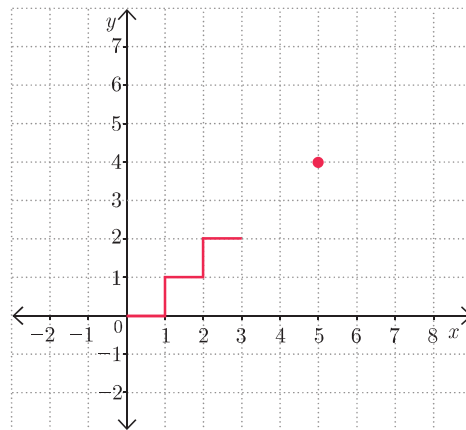
Abscisa (x)	Ordenada (y)	Coordenada $P(x, y)$
2	2	(2, 2)
4	3	
-1	0.5	

Abscisa (x)	Ordenada (y)	Coordenada $P(x, y)$
0	1	
3	2.5	
-1	4	

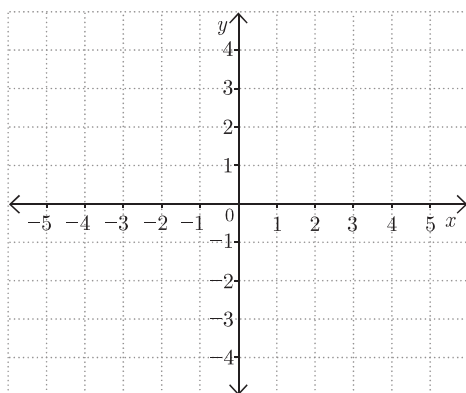
5. Localiza los puntos $A(-5, 6)$, $B(-5, -4)$ y $C(5, 1)$ y verifica que sean los vértices de un triángulo isósceles.



6. Observa la figura del siguiente plano cartesiano. Siguiendo el comportamiento de las líneas, ¿qué coordenadas tendrá el 5º nivel?



7. Dibuja el lugar geométrico que traza un perro atado a una cuerda de 3m de cuerda y en un espacio completamente libre.

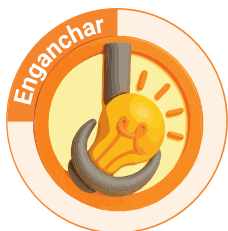


2. Distancia entre dos puntos

PROGRESIÓN

2

Describe algebraicamente algunas trayectorias, lugares geométricos o regiones en el plano empleando ecuaciones e inecuaciones con dos incógnitas o relaciones de distancia y ángulo entre puntos y rectas del plano cartesiano. **C1M1-C3M2**



1

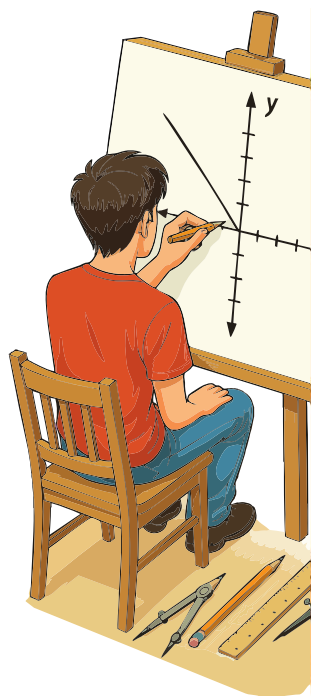
Integrados en equipos, realicen las siguientes actividades.

¡Dibujando líneas!

1. Trazar un plano cartesiano, -5 a 5 en ambos ejes.
2. Localiza los siguientes puntos: $A(1, 1)$, $B(4, 1)$ y $C(1, 5)$
3. Unir los puntos: A , B y C , para formar un triángulo.
4. Calcular el perímetro del triángulo.
5. Calcular el área del triángulo.
6. Iluminar el triángulo del color de su preferencia.
7. En plenaria compartan sus resultados.

Materiales:

- Estuche geométrico
- Lápiz
- Goma
- Lapicero
- Colores



- Para retroalimentar la actividad, se sugiere construir el triángulo, utilizando la App **GeoGebra**.



2

Para aprender más sobre la distancia entre dos puntos, se recomiendan los siguientes videos tutoriales.



[Punto medio de un segmento con ejercicios.](#)

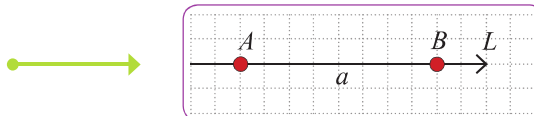


[Distancia entre dos puntos.](#)

Segmento rectilíneo dirigido

- 3** La porción de una línea recta comprendida entre dos de sus puntos se llama segmento rectilíneo o simplemente segmento. Los dos puntos se llaman extremos del segmento. Por ejemplo, para la recta L , los extremos del segmento son A y B , y la longitud del segmento L se representa por $\overline{AB}$.

Gráficamente se representa de la siguiente manera:



Desde el punto de vista de la Geometría elemental, las longitudes de los segmentos dirigidos $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$ son las mismas. En Geometría analítica, sin embargo, se hace la distinción entre los signos de estas longitudes. De acuerdo con esto, si se especifica que el segmento $\overline{AB}$ es positivo, entonces el segmento $\overline{BA}$ tiene una longitud negativa y se representa como sigue: $\overline{AB} = -\overline{BA}$

Distancia entre dos puntos ($d_{\overline{AB}}$)

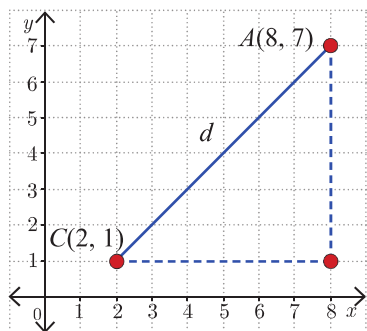
Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera del plano cartesiano, la distancia (d) entre ellos en línea recta se puede calcular con la fórmula:

$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

¿Cuál es la distancia que hay del punto $A(8, 7)$ al punto $C(2, 1)$?

Solución:

- 1.** Localizar los puntos de coordenadas en el plano cartesiano:



- 2.** Sustituir los valores en la fórmula de distancia y reducir las operaciones hasta su mínima expresión:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(2-8)^2 + (1-7)^2} \\ d &= \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} \\ d &= \sqrt{36+36} \\ d &= \sqrt{72} \\ &= \sqrt{(36)(2)} \\ &= \sqrt{36} \sqrt{2} \\ &= 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

• Por lo tanto: la distancia que hay del punto A al punto C , es:

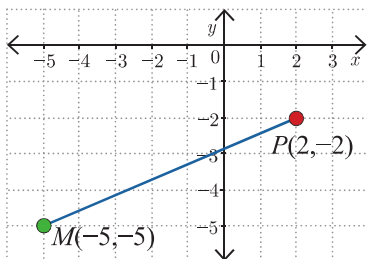
$$\begin{aligned} d &= 6\sqrt{2} \quad \text{Valor exacto.} \\ d &\approx 8.4 \quad \text{Valor aproximado.} \end{aligned}$$

Ejemplo 1

¿Cuál es la distancia que hay entre M y P si tienen como coordenadas: $M(-5, -5)$ y $P(2, -2)$?

Solución:

- 1.** Trazar la gráfica:



- 2.** Sustituir las coordenadas en la fórmula de distancia y simplificar las operaciones:

$$\begin{aligned} d_{\overline{MP}} &= \sqrt{(2-(-5))^2 + (-2-(-5))^2} \\ &= \sqrt{(2+5)^2 + (-2+5)^2} \\ &= \sqrt{(7)^2 + (3)^2} \\ &= \sqrt{49+9} \\ &= \sqrt{58} \quad \text{Valor exacto.} \\ &\approx 7.6157 \quad \text{Valor aproximado.} \end{aligned}$$

• Por lo tanto la distancia de M a P es de $\sqrt{58} \approx 7.6157$ u.

Ejemplo 2

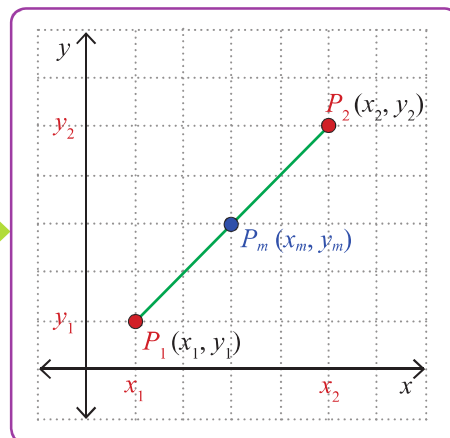
Punto medio (p_m)

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera del plano cartesiano, las coordenadas del punto medio $P_m(x_m, y_m)$ del segmento $\overline{AB}$ se calculan con las siguientes fórmulas:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

► Su ubicación e interpretación se observan en la gráfica de la derecha.



Ejemplo 3

Solución:

Determinar el punto medio del segmento $\overline{AB}$, cuyos extremos tienen como coordenadas $P_1(5, 7)$ y $P_2(1, -3)$.

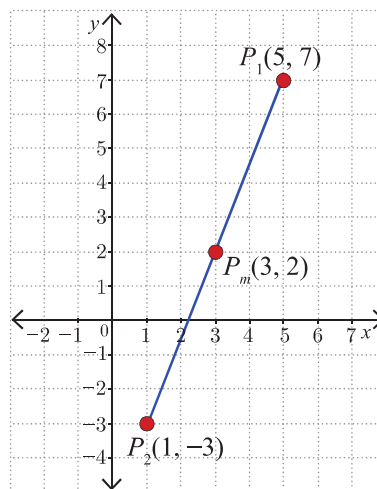
1. Sustituir los datos en las fórmulas:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{7 + (-3)}{2} = \frac{7 - 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

• Entonces, el punto medio $P_m(x_m, y_m)$ es $P_m(3, 2)$.

2. Trazar los puntos de coordenadas en el plano cartesiano y comprobar que el punto $P_m(3, 2)$ es la mitad del segmento.

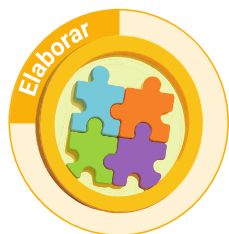


4

Determinar el otro extremo de un segmento si uno de ellos está en $P_1(3, 2)$ y su punto medio es el punto $P_m(-3, 5)$.

Operaciones:

Gráfica:



5 Para practicar la distancia entre dos puntos y el punto medio de un segmento de recta, resuelvan los siguientes ejercicios.

1. Dado dos puntos, calcular la distancia de los segmentos de recta.

a) $A(-5, 5)$
 $B(3, 5)$

b) $C(-3, -2)$
 $D(5, -2)$



2. Dados dos puntos, determinar las coordenadas de su punto medio.

a) $A(-5, -4)$
 $B(6, -4)$

b) $A(-4, 2)$
 $B(2, 2)$

3. El punto medio de un segmento es $P_m(3, 1)$. Si se sabe que un extremo está en el punto $A(2, 4)$, ¿cuál es el otro extremo del segmento?

Operaciones:

Gráfica:



Parcial

2



La parábola, la circunferencia y la elipse

Progresiones de aprendizaje en este parcial

Progresión

5

Analiza cuerpos en **caída libre**, **tiros parabólicos** como los descritos por las balas disparadas por cañones u otros fenómenos que involucren en su modelación funciones cuadráticas para deducir propiedades analíticas de la parábola.

Progresión

6

Analiza el **movimiento circular** utilizando la ecuación de la circunferencia, **medidas angulares** y pensamiento variacional. Se consideran las implicaciones físicas de la conservación del momento angular.

Progresión

7

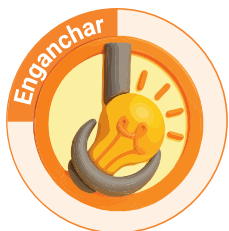
Estudia el movimiento planetario utilizando las **leyes de Kepler**, pensamiento variacional, aspectos analíticos de la **elipse** y la coplanaridad de cuerpos que se mueven en el espacio.

11. Definición y elementos de la parábola

PROGRESIÓN

5

Analiza cuerpos en **caída libre**, **tiros parabólicos** como los descritos por las balas disparadas por cañones u otros fenómenos que involucren en su modelación funciones cuadráticas para deducir propiedades analíticas de la parábola. **C3M2-C4M1**



1 De manera individual, lee el pequeño texto y responde las preguntas que aquí se proponen.

¡Pablo y el fútbol!

Pablo es amante del fútbol y todos los días practica tiros a la portería, él sueña con ser el mejor goleador del CF Real Madrid.

1. ¿Qué tipo de trayectoria consideras que sigue el balón cuando es pateado por Pablo?

2. Describe brevemente el tiro parabólico.



3. Escribe la ecuación general de una función de segundo grado.

4. Observa detenidamente a tu alrededor y escribe el nombre de tres objetos o fenómenos donde pueda observarse la parábola.

a) _____

b) _____

c) _____



- 2 Para aprender más respecto a la parábola, se recomienda ver los siguientes videos tutoriales.



[Concepto de parábola y sus elementos.](#)



[Definición de la parábola.](#)

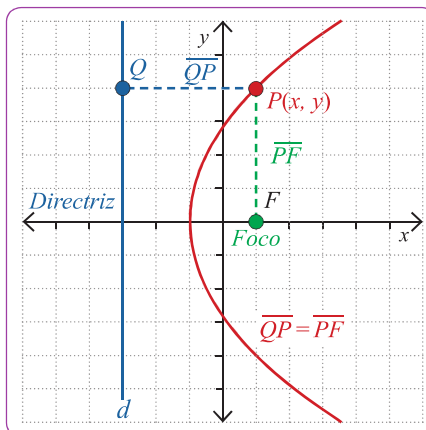
Definición de la parábola

3 Sea Q un punto que pertenece a la recta d del plano cartesiano; F y P , puntos exteriores a la recta d .

El **lugar geométrico** de todos los puntos $P(x, y)$ que cumplen con la igualdad $\overline{QP} = \overline{PF}$ se conoce como parábola.

La **parábola** es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cartesiano que se encuentran a la misma distancia de una recta, llamada **directriz**, y de un punto exterior a ella, llamado **foco**.

► Gráficamente, la parábola se puede representar en el plano cartesiano como se muestra en la gráfica derecha:



Elementos de la parábola

► Para su mejor estudio, es necesario especificar los siguientes elementos de la parábola:

■ **Foco (F)**: punto fijo que se utiliza en la generación de las cónicas. La elipse y la hipérbola tienen dos focos, y la parábola sólo uno.

■ **Directriz (d)**: dicho de una línea, de una figura o de una superficie que determina las condiciones de generación de otra línea. La directriz (d) es la recta opuesta al foco, teniendo a ambos como punto medio el vértice, es decir: $d_{QV} = d_{VF} = p$, además, la directriz es paralela al lado recto.

■ **Vértice (V)**: Punto de una curva en que la curvatura tiene un máximo o un mínimo, en este caso, es el punto medio entre la directriz y el foco de la parábola.

■ **Eje focal ($\overline{VF}$)**: es la recta imaginaria que pasa por el vértice y el foco de la parábola; esta recta es perpendicular a la directriz.

■ **Lado recto ($\overline{LR}$)**: es la medida que tiene el segmento imaginario que une dos puntos de la parábola en forma perpendicular al eje focal y que pasa por el foco. Su medida se determina con la expresión $LR = |4p|$.

■ **Parámetro (p)**: variable que, en una familia de elementos, sirve para identificar cada uno de ellos mediante su valor numérico. En este caso es la distancia dirigida (magnitud y sentido) del vector que va del vértice al foco de la parábola. Su valor se determina con la expresión $p = VF$.

● **Ecuación**: igualdad que contiene una o más incógnitas. Para este caso es la expresión algebraica de la parábola y de su lugar geométrico; tiene diferentes presentaciones, las más comunes son la ecuación ordinaria y la ecuación general.

Ecuación de la parábola con vértice en el origen:

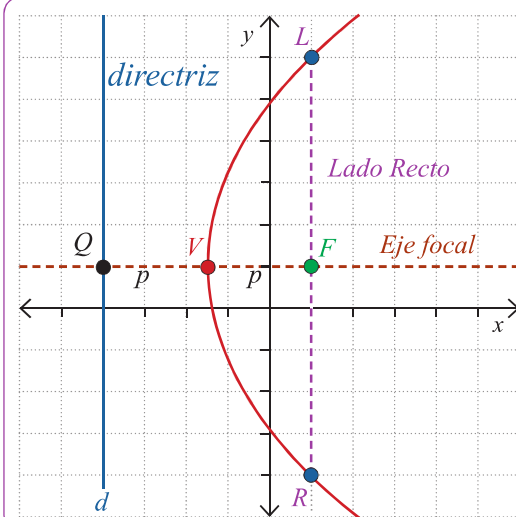
$$x^2 = 4p(y) \leftarrow \text{Parábola vertical} \rightarrow (x - h)^2 = 4p(y - k)$$

$$y^2 = 4p(x) \leftarrow \text{Parábola horizontal} \rightarrow (y - k)^2 = 4p(x - h)$$

● **Concavidad**: Si $p > 0$, entonces la parábola abre hacia la derecha o hacia arriba.

Si $p < 0$, entonces la parábola abre hacia la izquierda o hacia abajo.

Con todos los elementos de la parábola, se puede trazar su gráfica:



1

Trazar la gráfica de la parábola que tiene su vértice en el origen $V(0, 0)$ y su foco en $F(3, 0)$.

Ejemplo

Solución:

1. Localizar el vértice y el foco en el plano cartesiano:

$$V = (0, 0)$$

$$F = (3, 0)$$

2. Calcular la medida del parámetro y traza la directriz (d).

$$p = \overline{VF}$$

$$p = 3$$

$$x + y = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

3. Trazar el eje focal uniendo V con F .

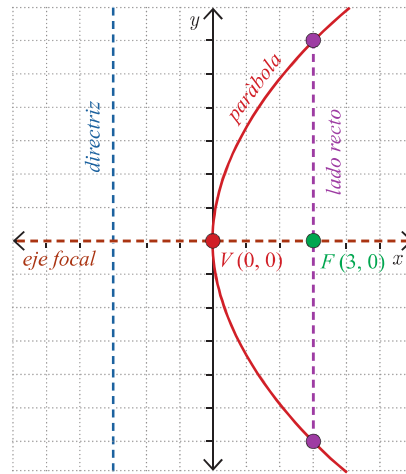
4. Calcular la medida del lado recto:

$$\overline{LR} = |4p|$$

$$\overline{LR} = |4(3)|$$

$$\overline{LR} = 12$$

5. Unir con una curva continua el vértice con cada uno de los extremos del lado recto, de tal forma que se observe la parábola.



6. La ecuación de la parábola: $y^2 = 4p(x)$
 $y^2 = 4(3)x$
 $y^2 = 12x$

2

Trazar la gráfica de la parábola con directriz $y = -2$ y con vértice $V(0, 1)$.

Ejemplo

Solución:

1. Trazar en el plano cartesiano la directriz;
 $y = -2$, y vértice $V(0, 1)$.

2. Graficar el eje focal uniendo el vértice V y la directriz con una recta punteada perpendicular a la directriz.

$$y = k - p$$

3. Calcular y localizar el foco de la parábola con la fórmula del punto medio. En este caso: $A = (0, -2)$ y $V(0, 1)$.

$$(0, 1) = \left(\frac{x_2 + 0}{2}, \frac{y_2 + (-2)}{2} \right)$$

Donde $F = (x_2, y_2)$. Por igualación se tiene que $F(0, 4)$.

$$F(h, k + p)$$

4. Calcular la medida del parámetro:

$$p = \overline{VF}$$

$$p = 3$$

5. Calcular el lado recto:

$$\overline{LR} = |4p|$$

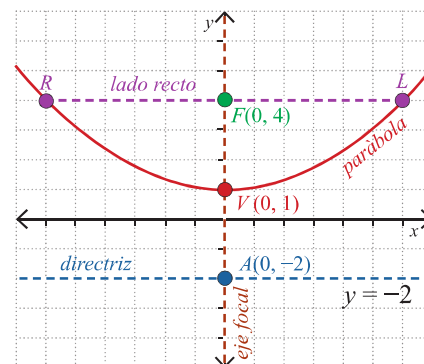
$$\overline{LR} = |4(3)|$$

$$\overline{LR} = |12|$$

$$\overline{LR} = 12$$

6. El lado recto se obtiene de trazar, a partir del foco, un segmento punteado perpendicular al eje focal cuya medida sea de 12 unidades, de tal forma que el foco sea el punto medio de dicho segmento, es decir, a partir del foco (F), seis unidades a la derecha y seis a la izquierda.

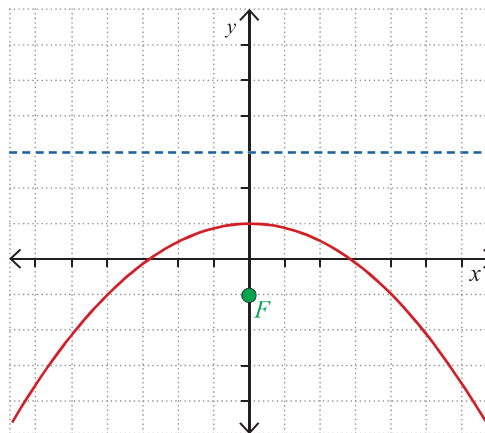
7. Por último, con una curva continua, se une el vértice con cada uno de los extremos del lado recto, prolongando un poco la curva de tal forma que se observe la gráfica de la parábola.



8. La ecuación de la parábola: $x^2 = 4p(y - k)$
 $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

4 Señalar cada uno de los elementos de la parábola en el siguiente plano cartesiano, con el color indicado.

- Graficar el eje focal uniendo F con la directriz.
- Escribir las coordenadas del vértice: $V(0, 1)$.
- Señalar las coordenadas del foco: $F = (0, -1)$.
- Indicar el parámetro: $p = -2$.
- Trazar el lado recto: $\overline{LR} = 8$.



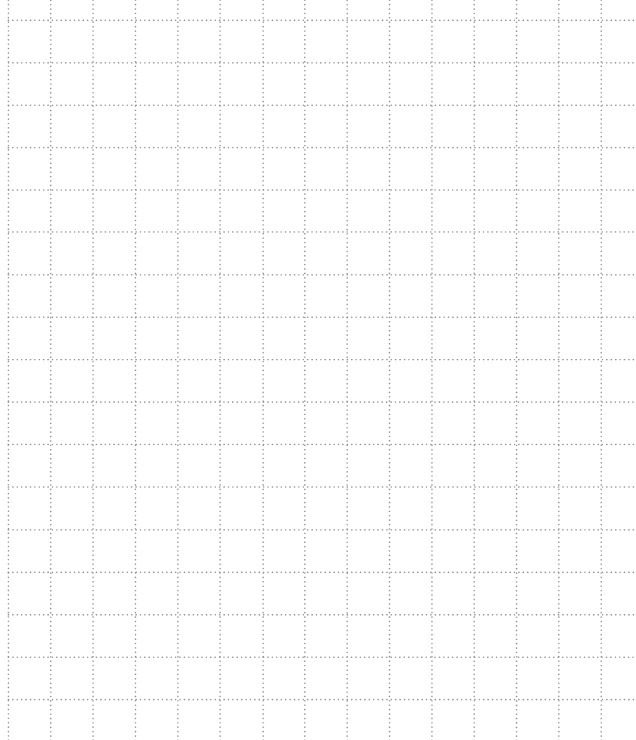
5 Para ejercitar la parábola, resuelve los siguientes ejercicios que a continuación se proponen, luego, traza las gráficas de cada una de ellas en el espacio de abajo.

1. Coordenadas del foco de la parábola que tiene como vértice $V(3, 0)$, el valor de $p = -2$, y su eje focal es el eje x .
2. Trazar la gráfica de la parábola que tiene como directriz: $y = -3$, y cuyo foco es $F(1, 1)$.
3. Bosquejar la gráfica de la parábola que tiene como vértice $V(-1, 1)$ y foco $F(-3, 1)$.
4. ¿Cuál es la posición del vértice de la parábola que tiene su foco $F(2, -5)$ y su directriz es la recta $y = 3$?



Operaciones:

Gráfica:

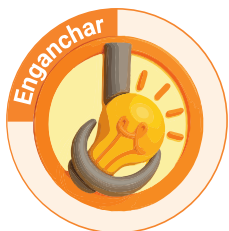


12. Ecuación reducida de la parábola

PROGRESIÓN

5

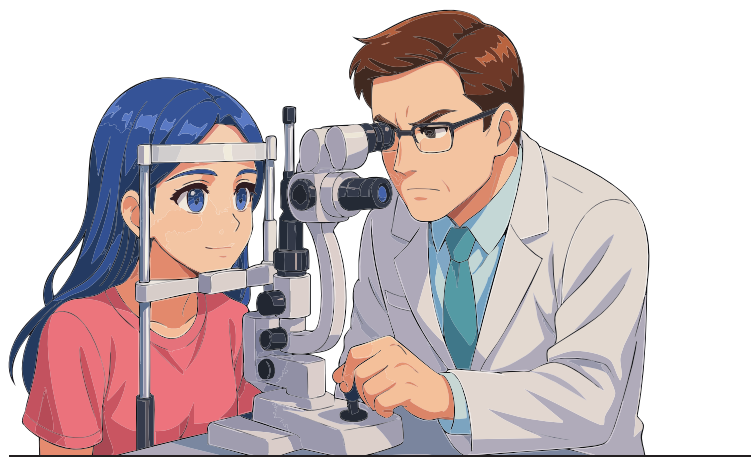
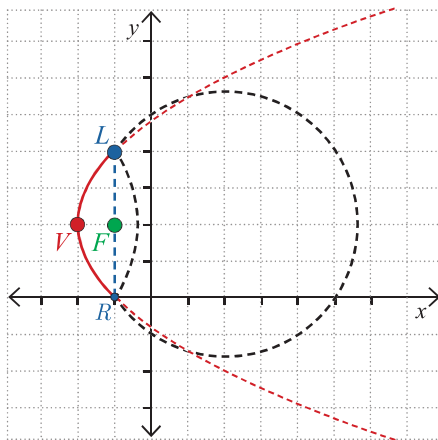
Analiza cuerpos en **caída libre**, **tiros parabólicos** como los descritos por las balas disparadas por cañones u otros fenómenos que involucren en su modelación funciones cuadráticas para deducir propiedades analíticas de la parábola. **C3M2-C4M1**



- 1 Integrados en equipos, lean el siguiente texto, analicen la gráfica, respondan las preguntas que se plantean, finalmente, compartan una enseñanza y/o aprendizaje de la actividad.

¡La parábola y sus aplicaciones médicas!

Durante sus estudios, un médico cirujano observó que la córnea del ojo humano, en un plano de dos dimensiones, tiene la forma de una parábola. La siguiente gráfica representa parte del ojo humano, donde la región **RVLFR** es una sección de parábola.



- La parábola, tanto en su forma geométrica como en su acepción literaria, tiene un papel muy importante en la medicina, desde el desarrollo de tecnologías diagnósticas y terapéuticas.

1. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice y el foco de la parábola de la gráfica anterior?

2. ¿Cuál es la medida del parámetro (p) y del lado recto (LR) de la parábola de la gráfica anterior?

3. ¿Cuál es la ecuación ordinaria de la sección parabólica si el vértice estuviera en el origen?

4. ¿Es posible formular una ecuación que describa el lugar geométrico de la sección parabólica sin trasladar el origen del plano cartesiano a su vértice?



2

Para seguir aprendiendo más sobre la ecuación reducida de la parábola, se recomiendan los siguientes videos tutoriales.



[Ecuación canónica de la parábola.](#)



[Parábola.](#)

Ecuación reducida de la parábola

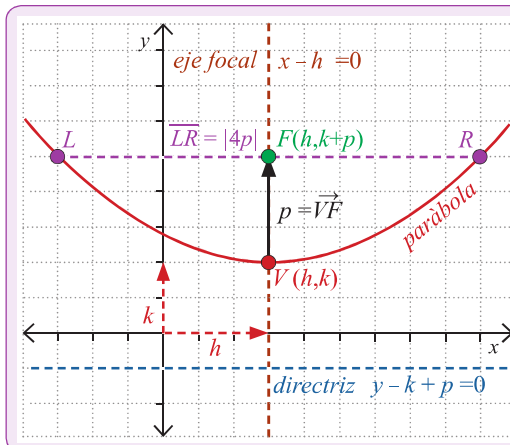
3

Parábola vertical con vértice (h, k)

- Eje focal paralelo al eje y .
- Vértice: $V(h, k)$
- Foco: $F(h, k + p)$
- Parámetro: $p = \overline{VF}$
- Lado recto: $\overline{LR} = |4p|$
- Directriz: $y - k + p = 0$
- Eje focal: $x - h = 0$

Ecuación ordinaria: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

Lugar geométrico:



Concavidad:

Sí $p > 0$, entonces la parábola es cóncava hacia arriba.

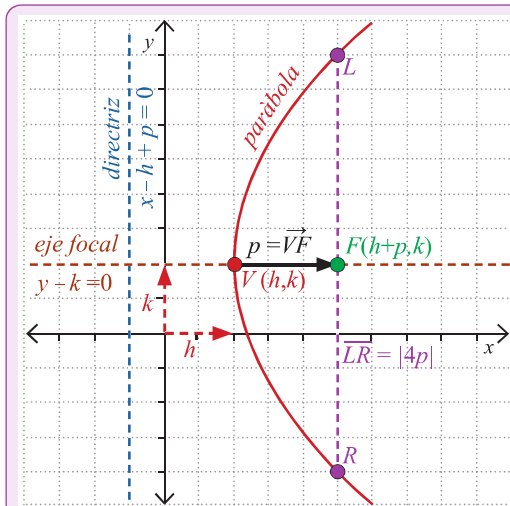
Sí $p < 0$, entonces la parábola es cóncava hacia abajo.

Parábola horizontal con vértice (h, k)

- Eje focal paralelo al eje x .
- Vértice: $V(h, k)$
- Foco: $F(h + p, k)$
- Parámetro: $p = \overline{VF}$
- Lado recto: $\overline{LR} = |4p|$
- Directriz: $x - h + p = 0$
- Eje focal: $y - k = 0$

Ecuación ordinaria: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

Lugar geométrico:



Concavidad:

Sí $p > 0$, entonces la parábola es cóncava hacia la derecha.

Sí $p < 0$, entonces la parábola es cóncava hacia la izquierda.

Calcular la ecuación de la parábola con vértice $V(1, 2)$ y foco $F(1, -2)$.

Solución:

1. Al comparar las coordenadas del vértice y del foco, se deduce que poseen la misma abscisa; por lo tanto, se trata de una parábola vertical.

2. Del vértice $V(1, 2)$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} h &= 1 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

3. Si el foco es $F(h, k + p)$, para este caso:

$$\begin{aligned} F(1, 2 - 4) \\ F(1, -2) \end{aligned}$$

Sí $k + p = -2$, entonces $p = -4$.

4. La ecuación buscada de la parábola tiene la forma de:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Al sustituir se tiene que:

$$\begin{aligned} (x - (1))^2 &= 4(-4)(y - (2)) \\ (x - 1)^2 &= -16(y - 2) \end{aligned}$$

• Por lo tanto, $(x - 1)^2 = -16(y - 2)$ es la ecuación reducida de la parábola que tiene $V(1, 2)$ y $F(1, -2)$.

Ejemplo
1

Ejemplo 2

Obtener la ecuación ordinaria de la parábola que tiene como foco $F(-2, 5)$ y como directriz: $y - 1 = 0$.

Solución:

1. La directriz $y - 1 = 0$ indica que la parábola es vertical:

Para este caso: $y - k + p = 0$

$$y - 1 = 0$$

Por lo tanto: $-k + p = -1$

2. A partir del foco $F(-2, 5)$ y sabiendo que $F(h, k + p)$, obtener las igualdades:

$$h = -2$$

$$k + p = 5$$

3. Formar un sistema de dos ecuaciones con $-k + p = -1$ y $k + p = 5$. Resolver el sistema sumando las ecuaciones y hallar los valores de k y p .

$$\begin{cases} -k + p = -1 \\ k + p = 5 \end{cases}$$

$$2p = 4$$

$$p = 2/4$$

$$p = 2$$

$$k + p = 5$$

$$k + 2 = 5$$

$$k = 5 - 2$$

$$k = 3$$

4. Sustituir los valores de h, k y p en la ecuación ordinaria de la parábola vertical:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Si $p = 2, k = 3, h = -2$, entonces:

$$(x - (-2))^2 = 4(2)(y - (3))$$

5. Al simplificar se obtiene la ecuación:

$$(x + 2)^2 = 8(y - 3)$$

• Por lo tanto, la ecuación reducida de la parábola que tiene como foco $F(-2, 5)$ y cuya directriz es: $y - 1 = 0$, es $(x + 2)^2 = 8(y - 3)$.

Ejemplo 3

Determinar la ecuación de la parábola con vértice $V(2, 4)$ y directriz: $x - 5 = 0$.

Solución:

1. La directriz indica que es una parábola horizontal: $x - h + p = 0$

Para este caso: $x - 5 = 0$

Por lo tanto: $-h + p = -5$

2. Del vértice $V(2, 4)$, se obtiene: $h = 2$ $k = 4$

3. Si $-h + p = -5$ y $h = 2$, entonces: $-(2) + p = -5$

Al despejar: $p = -3$

4. Sustituir los valores de h, k y p en la ecuación de la parábola horizontal:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

$$(y - (4))^2 = 4(-3)(x - (2))$$

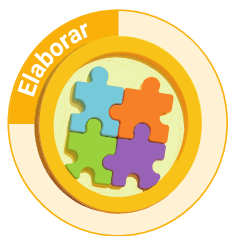
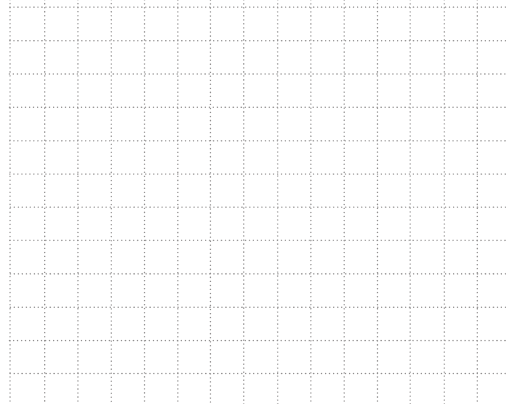
5. Al simplificar, la ecuación ordinaria de la parábola es: $(y - 4)^2 = -12(x - 2)$

Ejemplo 4

Gráfica la parábola que tiene como ecuación ordinaria $(y - 2)^2 = 4(x + 2)$.

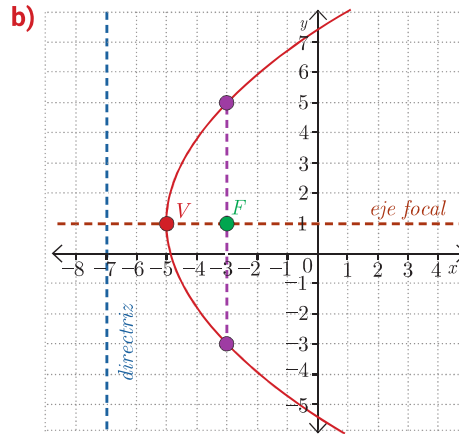
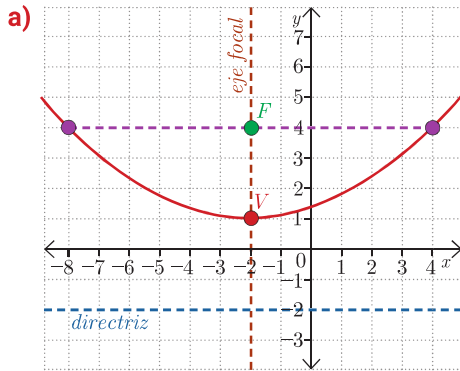
Operaciones:

Gráfica:



5 Resolver cada uno de los ejercicios que a continuación se presentan.

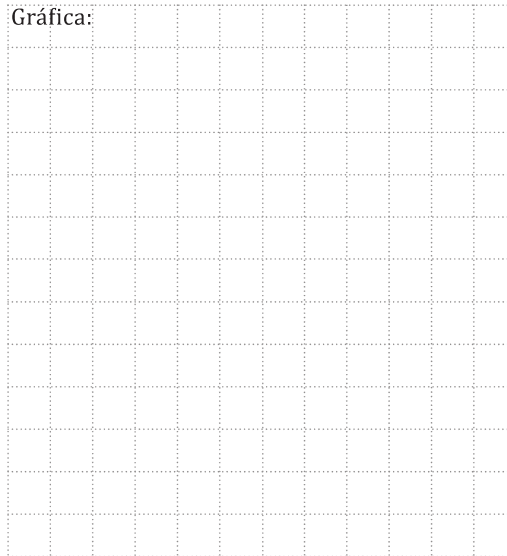
1. Hallar las ecuaciones ordinarias de las siguientes parábolas.



2. Graficar la parábola cuya ecuación es: $(y - 2)^2 = -8(x + 2)$.

Operaciones:

Gráfica:



Parcial

3

La hipérbola, rotación y traslación de ejes

Progresiones de aprendizaje en este parcial

Progresión

8

Utiliza las **esferas de Dandelin** para identificar que las cónicas (**incluyendo la hipérbola**) se obtienen como el resultado de los cortes de un plano a un cono circular de doble hoja.

Progresión

9

Considera movimientos del plano y **cambios de coordenadas al usar traslaciones y rotaciones** con el fin de simplificar la expresión analítica de curvas en el plano.

Progresión

10

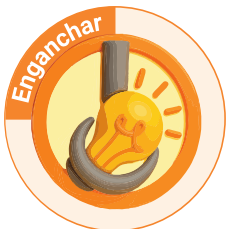
Utiliza **coordenadas polares** e identidades trigonométricas para lograr una descripción más económica de curvas que de ser descritas cartesianamente tendrían una expresión muy complicada, como por ejemplo, las espirales, cardioides, entre otras.

21. Definición y elementos de la hipérbola

PROGRESIÓN

8

Utiliza las **esferas de Dandelin** para identificar que las cónicas (**incluyendo la hipérbola**) se obtienen como el resultado de los cortes de un plano a un cono circular de doble hoja. **C2M4**



- 1 Integrados en equipos de cuatro personas, lean y analicen el siguiente texto, luego, respondan a las preguntas que aquí se plantean.

“El aeropuerto de Dulles Washington y las cónicas”

Ricardo González es ingeniero agrónomo. Actualmente, se encuentra trabajando para una empresa dedicada a sistemas de riego. Como parte de su capacitación en la empresa, tiene que tomar cursos talleres en EE.UU. Un día tuvo la oportunidad de viajar al aeropuerto de Dulles Washington y desde el cielo pudo ver que éste tiene una sección transversal de hipérbola y la otra de una parábola.



► En plenaria, respondan las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo se define una hipérbola?

2. ¿Qué aplicaciones tiene la hipérbola en la vida cotidiana?

3. ¿Qué modelo matemático permite tocar el lugar geométrico de una hipérbola?

4. ¿Qué importancia tiene estudiar en el bachillerato la hipérbola?



- 2 Para seguir aprendiendo más de la ecuación reducida de la hipérbola, se recomiendan ver los siguientes videos tutoriales.



[Aplicación de la hipérbola en telescopios.](#)



[12 Elementos de la hipérbola.](#)

Ecuación reducida de la hipérbola con $C(0,0)$

3 La **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos del plano, tal que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos, es igual a una constante de magnitud menor que la distancia entre los focos.

▶ Así, para cualquier punto P de la hipérbola cuyos focos son F y F' se cumple que:

$$|\overline{FP} - \overline{F'P}| = k$$

▶ Donde $k < \overline{FF'}$ y una constante positiva

▶ Por otra parte:

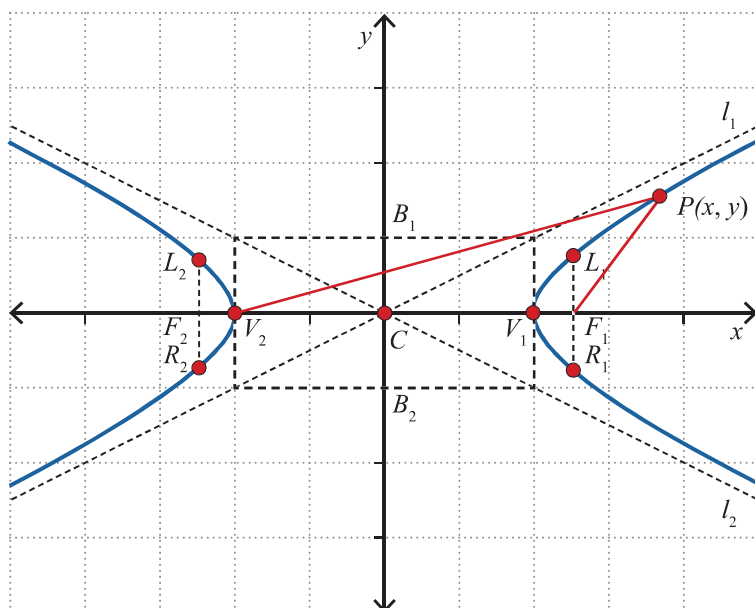
$$\begin{aligned} |\overline{FP} - \overline{F'P}| &= k & \text{si} & \quad \overline{FP} > \overline{F'P} \\ |\overline{FP} - \overline{F'P}| &= k & \text{si} & \quad \overline{FP} < \overline{F'P} \end{aligned}$$

▶ Geométricamente, las dos desigualdades anteriores, indican la existencia de dos ramas en la gráfica de la hipérbola.



Los elementos de una hipérbola son:

- Centro: C
- Vértices: V_1 y V_2
- Focos: F_1 y F_2
- Extremos del eje conjugado: B_1 y B_2
- Eje transverso o real: $\overline{V_1V_2} = 2a$
- Eje focal: $\overline{F_1F_2} = 2c$
- Eje conjugado o imaginario: $\overline{B_1B_2} = 2b$
- Condición: $c^2 = a^2 + b^2$; $c > b$, $c > a$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ ($e > 1$)
- Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$
- Asíntotas: l_1 y l_2



Cuando la hipérbola tiene $C(0, 0)$ y su eje focal coincide con el eje vertical (y), sus elementos son:

a) Ecuación reducida o canónica: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

b) Centro: $C(0, 0)$.

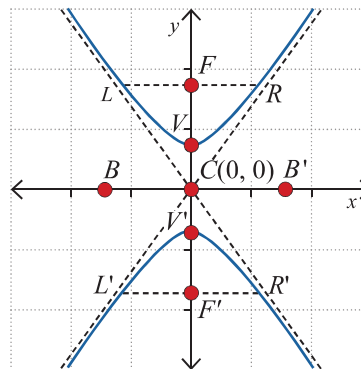
c) Focos: $F(0, c)$ y $F'(0, -c)$.

d) Los extremos del eje conjugado tienen coordenadas: $(b, 0)$ y $(-b, 0)$.

e) Vértices: $V(0, a)$ y $V'(0, -a)$.

f) Asíntotas: $y = \pm \frac{a}{b}x$.

g) Hipérbola vertical con $C(0, 0)$ y eje focal (y).



► En ambas hipérbolas, se tiene que:

Eje transverso = $2a$.

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$.

Eje conjugado = $2b$.

Lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a}$.

Ejemplo 1

Sea la ecuación $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{1} = 1$. Determinar sus focos, vértices, excentricidad, lado recto y trazar la gráfica de la hipérbola.

Solución:

1. Determinar los valores de a y b :

$$a = 2 \quad b = 1$$

2. Calcular el valor de c :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{2^2 + 1^2}$$

$$c = \sqrt{5}$$

3. Sustituir el valor de c en $(0, \pm c)$, para determinar el valor de los focos:

$$F(0, \sqrt{5}), F'(0, -\sqrt{5})$$

4. Sustituir el valor de a en $(0, \pm a)$, para determinar el valor de los vértices:

$$V(0, 2), V'(0, -2)$$

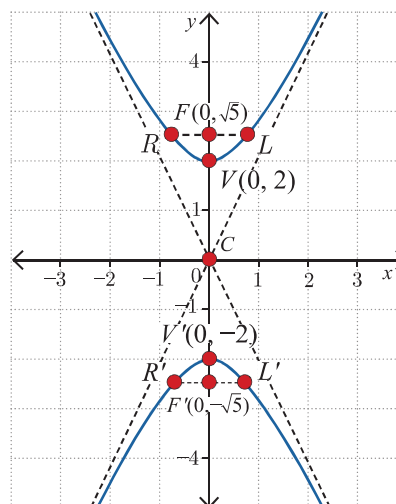
5. Calcular el valor de la excentricidad:

$$e = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1.11$$

6. Determinar el valor del lado recto:

$$LR = \frac{2b^2}{a} \quad LR = \frac{2(1)^2}{2} = 1$$

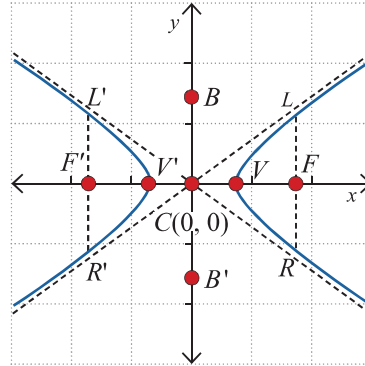
7. Trazar la gráfica:



Cuando la hipérbola tiene $C(0, 0)$ y su eje focal coincide con el eje horizontal (x), sus elementos son:

- a) Ecuación reducida o canónica: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- b) Centro: $C(0, 0)$.
- c) Focos: $F(\pm c, 0)$.
- d) Los extremos del eje conjugado tienen coordenadas: $B(0, \pm b)$.
- e) Vértices: $V(\pm a, 0)$.
- f) Asíntotas: $y = \pm \frac{b}{a}x$.

- g) Gráficamente de una hipérbola con $C(0, 0)$ y eje focal vertical (y).



Determinar la ecuación ordinaria de la hipérbola que tiene como vértices: $V(3, 0)$ y $V'(-3, 0)$ y focos: $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$.

Solución:

1. Localizar los focos y los vértices de la hipérbola en el plano cartesiano para deducir que tiene como ecuación reducida:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2. Calcular las distancias entre los vértices:

$$2a = 6$$

$$a = 3$$

$$2c = 10$$

$$c = 5$$

3. Calcular el valor de b :

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{5^2 - 3^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 9}$$

$$b = \sqrt{16}$$

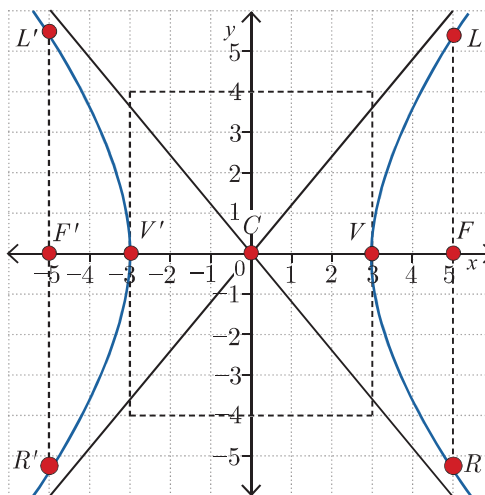
$$b = 4$$

4. Sustituir los valores de a y b en la ecuación:

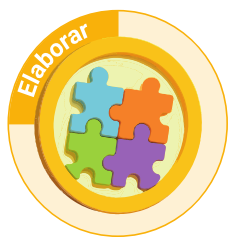
$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

5. Trazar la gráfica:



Ejemplo 2



4

Los vértices de una hipérbola son los puntos $V(0, 2)$ y $V'(0, -2)$; sus focos son $F(0, 3)$ y $F'(0, -3)$. Determinar su ecuación, las coordenadas de los puntos extremos del eje conjugado, las longitudes del eje transverso y conjugado, la longitud de cada lado recto, la excentricidad y traza la gráfica.

Gráfica:



5

1. Encuentra la ecuación de la hipérbola considerando los elementos que se mencionan:

a) $C(0, 0)$, $a = 2$, $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$ y su eje focal es x .

b) $C(0, 0)$, $F(0, \sqrt{5})$, $F'(0, -\sqrt{5})$, $V(0, \pm 1)$ y asíntotas $y = \pm \frac{1}{2}x$.

2. Hallar la ecuación reducida y trazar las gráficas de las hipérbolas cuyas ecuaciones generales son:

a) $x^2 - 8y^2 = 8$

b) $7x^2 - 9y^2 - 63 = 0$

3. Hallar la ecuación ordinaria de la hipérbola horizontal con centro en el origen y cuyos ejes conjugados y transversos tienen las medidas indicadas.

a) $2a = 4, \quad 2b = 6$

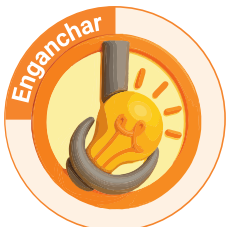
a) $2a = 2, \quad 2b = 8$

22. Ecuación reducida de la hipérbola con $C(h, k)$

PROGRESIÓN

8

Utiliza las **esferas de Dandelin** para identificar que las cónicas (**incluyendo la hipérbola**) se obtienen como el resultado de los cortes de un plano a un cono circular de doble hoja. **C2M4**



1

En equipos, lean el texto y luego responde las preguntas.

¡El albañil que no es ingeniero!

Pancho López es un albañil del fraccionamiento San Carlos Metepec, México. Él jamás estudió ingeniería civil, sin embargo, realiza construcciones de ingeniería.

Uno de sus patrones, solicitó que le construyera una fuente en forma de hipérbola y otro que le diseñara un patio para su jardín.

1. ¿Por qué consideras que sea importante estudiar la hipérbola?

2. ¿En dónde observas que se aplique la hipérbola en la vida cotidiana?

3. ¿Consideras que en ingeniería tiene aplicación la hipérbola?

Si _____ No _____ ¿Por qué?

4. ¿Te gustaría aprender más sobre la hipérbola? Si _____ No _____ ¿Por qué?



2

Para aprender más respecto a la ecuación reducida de la hipérbola, se recomienda ver los siguientes videos tutoriales.



[Hallar la ecuación reducida de la hipérbola.](#)



[La hipérbola. Ejercicio \(ecuación reducida o canónica\).](#)

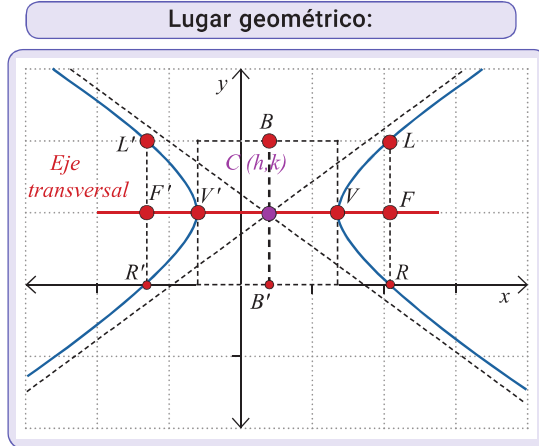
Ecuación reducida de la hipérbola con $C(h, k)$

- 3** Si una hipérbola con centro en el origen y eje transversal coincidente con un eje coordenado se desplaza h unidades horizontales y luego k unidades verticalmente, el resultado es una hipérbola con centro en (h, k) y eje transversal paralelo a un eje coordenado.



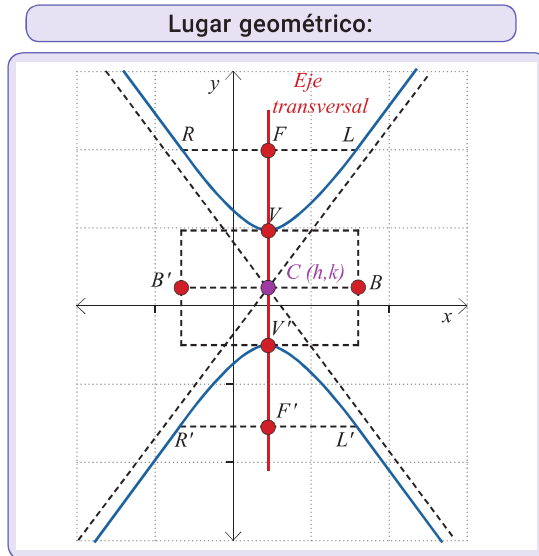
Hipérbola horizontal con centro (h, k)

- a) Eje transversal paralelo al eje x .
- b) Ecuación ordinaria: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
- c) Vértices: $V(h \pm a, k)$
- d) Focos: $F(h \pm c, k)$
- e) Asíntotas: $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$
- f) Extremos del eje conjugado $B(h, k \pm b)$



Hipérbola vertical con centro (h, k)

- a) Eje transversal paralelo al eje y .
- b) Ecuación ordinaria: $\frac{(x-h)^2}{b^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$
- c) Vértices: $V(h, k \pm a)$
- d) Focos: $F(h, k \pm c)$
- e) Asíntotas: $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$
- f) Extremos del eje conjugado $B(h \pm b, k)$



- 1** Ejemplo 1 Determinar la ecuación reducida de la hipérbola vertical, con centro en $C(1, -3)$, cuyos semiejes transverso y conjugado miden 5 y 7 unidades respectivamente.

Solución:

- 1.** Determinar el centro $C(1, -3)$ y de los semiejes transverso y conjugado de 5 y 7 unidades, los valores de:

$$\begin{aligned} h &= 1 \\ k &= -3 \\ a &= 5 \\ b &= 7 \end{aligned}$$

- 2.** Sustituir los valores de h, k, a y b , en la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

- Por lo tanto la ecuación reducida de la hipérbola es:

$$\frac{(y+3)^2}{25} - \frac{(x-1)^2}{49} = 1$$

Ejemplo 2

Determinar la ecuación de la hipérbola con centro en $C(1, -2)$, un foco en $F(4, -2)$ y un vértice en $V(3, -2)$.

Solución:

1. Obtener los valores de h, k de las coordenadas del centro:

$$C(1, -2), \quad h = 1 \quad y \quad k = -2$$

2. Calcular la distancia del centro $C(1, -2)$ al foco $F(4, -2)$:

$$\text{Si } F(h \pm c, k)$$

$$h + c = 4$$

$$c = 4 - 1$$

$$c = 3$$

3. Calcular la distancia del centro $C(1, -2)$ al vértice $V(3, -2)$:

$$\text{Si } V(h \pm a, k)$$

$$h + a = 3$$

$$1 + a = 3$$

$$a = 3 - 1$$

$$a = 2$$

4. Calcular el valor de b :

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{3^2 - 2^2}$$

$$b = \sqrt{9 - 4}$$

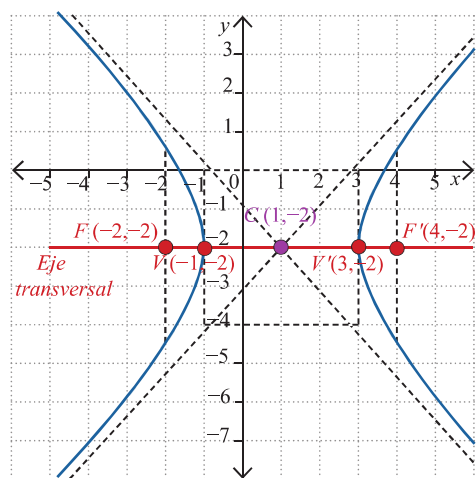
$$b = \sqrt{5}$$

5. Determinar la ecuación reducida de la hipérbola:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

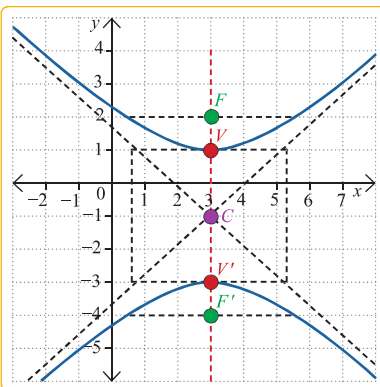
$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{5} = 1$$

Paso 6 Trazar la gráfica:

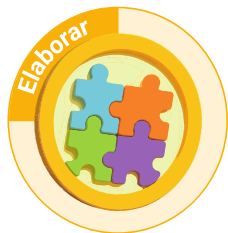


4

Determinar la ecuación ordinaria de la hipérbola cuya gráfica se muestra a continuación.



Operaciones:



5

De manera individual y con el apoyo de tus apuntes, resuelve los siguientes ejercicios.

1. Determinar la ecuación de la hipérbola que tiene como vértices: $V(-2, -1)$, y $V'(-2, 3)$, y la amplitud del eje conjugado es de $4u$.

2. Determinar la ecuación de la hipérbola de eje transversal paralelo al eje x , centro $V(-3, -2)$ y excentricidad $e = \frac{3}{2}$, y la amplitud del eje normal es $2\sqrt{20}$.



3. Si los vértices de una hipérbola están en los puntos $V'(-5, -3)$ y $V(-5, -1)$ y los extremos del eje conjugado están en $B'(-7, -2)$ y $B(-3, -2)$. Determinar la ecuación de la hipérbola.

4. Hallar la ecuación de la hipérbola que tiene foco $F(7, 2)$, vértice $V(5, 2)$ y de centro $C(-2, -5)$.